

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КУРСА ТФКП

*Составители: М.И. Карлов
Е.С. Половинкин
М.И. Шабунин*

МОСКВА 2007

УДК 517.

Рецензент:

Доктор физико-математических наук, профессор *Иванов Г.Е.*

Методические указания по решению задач курса ТФКП /

Сост. М.И. Карлов, Е.С. Половинкин, М.И. Шабунин. — М.: МФТИ, 2007. 78 с.

УДК 517

Предназначено для студентов и преподавателей университетов и технических вузов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КУРСА ТФКП

Составители: КАРЛОВ Михаил Иванович
ПОЛОВИНКИН Евгений Сергеевич
ШАБУНИН Михаил Иванович

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2007

© Составители, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Ряд Лорана	4
§ 2. Изолированные особые точки однозначного характера	11
§ 3. Вычисление вычетов	21
§ 4. Вычисление интегралов по замкнутому контуру	30
§ 5. Вычисление значений регулярных ветвей многозначных функций. Ряды Лорана для регулярных ветвей	37
§ 6. Интегралы от регулярных ветвей	42
§ 7. Вычисление несобственных интегралов	44
§ 8. Конформные отображения элементарными функциями	60
§ 9. Задачи	72
Задачи семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)	72
Задачи семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)	73
Задачи семестровой к/р по ТФКП (2002–2003 г.)	73
Задачи семестровой к/р по ТФКП (2003–2004 г.)	74
Задачи семестровой к/р по ТФКП (2005–2006 г.)	75
§ 10. Ответы	76
Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)	76
Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)	76
Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2002–2003 г.)	77
Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2003–2004 г.)	78
Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2005–2006 г.)	78

§ 1. Ряд Лорана

Справочные сведения

1. Область сходимости ряда Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (1)$$

где a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа, называется *рядом Лорана*. Ряд (1) называется *сходящимся в точке z* , если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (2)$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \quad (3)$$

а сумма ряда (1) по определению равна сумме рядов (2) и (3). Область сходимости ряда (2) — круг

$$|z-a| < R$$

(при $R = 0$ ряд (2) сходится только при $z = a$, а при $R = \infty$ — во всей комплексной плоскости). Ряд (3) сходится в области

$$|z-a| > \rho.$$

Если $\rho < R$, то ряд (1) сходится в области

$$D = \{z: \rho < |z-a| < R\}, \quad (4)$$

т. е. в круговом кольце с центром в точке a (эту область называют *кольцом сходимости ряда Лорана* (1)).

Сумма ряда Лорана в области (4) является регулярной функцией, а во всяком замкнутом кольце

$$D_1 = \{z: \rho < \rho_1 \leq |z-a| \leq R_1 < R\},$$

где $D_1 \subset D$, ряд (1) сходится равномерно.

2. Разложение регулярной функции в ряд Лорана.

Функция $f(z)$, регулярная в кольце D , представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана (1), т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad (5)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \rho < R_0 < R, \quad (6)$$

окружность в формуле (6) ориентирована положительно (обход совершается против часовой стрелки).

Разложение (5) функции $f(z)$, регулярной в кольце D , единственно.

3. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Если функция $f(z)$ регулярна в кольце

$$D = \{z: \rho < |z-a| < R\},$$

и при этом

$$M = \max_{z \in \gamma_r} |f(z)|,$$

где

$$\gamma_r = \{z: |z-a| = r, \rho < r < R\},$$

то для коэффициентов c_n ряда Лорана (5) справедливы неравенства

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Для нахождения коэффициентов c_n ряда Лорана (5) функции $f(z)$, регулярной в кольце $D = \{z: \rho < |z-a| < R\}$, формулы (6) обычно не используют, а представляют функцию $f(z)$ в виде суммы $f_1(z) + f_2(z)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в области $|z-a| < R$, а функция $f_2(z)$ регулярна в области $|z-a| > \rho$. Разложив функцию $f_1(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a , а функцию $f_2(z)$ — по отрицательным

степеням $z - a$ с помощью приемов, указанных в § 7, можно найти разложение (5). Если $f(z)$ — рациональная функция, то ее представляют в виде суммы простых дробей.

Примеры с решениями

Пример. Функцию $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+3)}$, регулярную в областях $D_1 = \{z: |z| < 1\}$, $D_2 = \{z: 1 < |z| < 3\}$, $D_3 = \{z: |z| > 3\}$, разложить в этих областях в ряд Лорана.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+3} \right). \quad (7)$$

Если $|z| < 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (8)$$

а если $|z| > 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{z}\right)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}. \quad (9)$$

Аналогично, если $|z| < 3$, то

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3 \left(1 + \frac{z}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}, \quad (10)$$

а если $|z| > 3$, то

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{3}{z}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{z^n}. \quad (11)$$

а) В области D_1 , где $|z| < 1$, используя формулы (7), (8), (10), получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left[1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right] z^n.$$

Этот ряд есть ряд Тейлора для функции $f(z)$.

б) В области D_2 , где $1 < |z| < 3$, используя формулы (7), (9), (10), имеем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как положительные, так и отрицательные степени z .

в) В области D_3 , где $|z| > 3$, используя разложения (7), (9), (11), находим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1} - 1}{4z^n}.$$

Этот ряд содержит только отрицательные степени z .

Пример. Рациональная функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}} - \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}} \right).$$

Разложить ее в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку $z = \frac{3}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

Решение. Ряд $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}}$

сходится в области $|z| > 1$, а ряд

$$f_2(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}} = -\frac{4}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z^2} \right)^n$$

сходится, если $\left| \frac{4}{z^2} \right| < 1$, т. е. $|z| > 2$. Так как точка $z = \frac{3}{2}$ содержится в кольце $1 < |z| < 2$, то функцию $f_2(z)$ нужно представить рядом по степеням z , сходящимся в области $|z| < 2$.

Используя разложение $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, запишем $f_2(z)$ в виде

$$f_2(z) = -\frac{4}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{z^2}} = -\frac{4z}{z^2 - 4} = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{4}},$$

откуда

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, \quad |z| < 2,$$

а искомое разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, \quad 1 < |z| < 2. \quad \blacktriangle$$

Пример. Разложить в ряд Лорана в кольце с центром в точке $z = 0$, которому принадлежит точка $z = 3$, функцию

$$f(z) = \frac{3z^3 + 6z^2 - 8}{z^2 - 3z - 4}.$$

Указать границы кольца сходимости.

Решение. Разделив многочлен $3z^3 + 6z^2 - 8$ на многочлен $z^2 - 3z - 4$, запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{57z + 52}{(z - 4)(z + 1)},$$

а затем представим полученную правильную дробь в виде суммы простых дробей:

$$\frac{57z + 52}{(z - 4)(z + 1)} = \frac{A}{z - 4} + \frac{B}{z + 1},$$

где

$$A = \left. \frac{57z + 52}{z + 1} \right|_{z=4} = 56, \quad B = \left. \frac{57z + 52}{z - 4} \right|_{z=-1} = 1.$$

Следовательно,

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{56}{z - 4} + \frac{1}{z + 1}.$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z_1 = -1$, $z_2 = 4$ и ее можно разложить в ряд

по степеням z в областях $|z| < 1$, $1 < |z| < 4$ и $|z| > 4$. Точка $z = 3$ принадлежит кольцу $1 < |z| < 4$. Поэтому функцию $\frac{56}{z-4}$ нужно разложить в ряд по положительным степеням z , а функцию $\frac{1}{z+1}$ — в ряд по отрицательным степеням z . Преобразуем исходную функцию:

$$f(z) = 3z + 15 - \frac{14}{1 - \frac{z}{4}} + \frac{1}{z(1 + \frac{1}{z})},$$

откуда

$$\begin{aligned} f(z) &= 3z + 15 - 14 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} = \\ &= 1 - \frac{z}{2} - 14 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}. \end{aligned}$$

Полученный ряд сходится в кольце $1 < |z| < 4$.

Пример. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z+2i)}$ в ряд Лорана по степеням $z - 2i$ в кольце D , которому принадлежит точка $z = 1$. Указать границы кольца сходимости.

Решение. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{z^2 + 2iz - 2iz + 2}{z(z + 2i)} = 1 - i \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z + 2i} \right).$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0$ и $z = -2i$. Поэтому ее можно разложить в ряд Лорана по степеням $z - 2i$ в областях

$$|z - 2i| < 2, \quad 2 < |z - 2i| < 4, \quad |z - 2i| > 4.$$

Полагая $z - 2i = t$, получим $f(z) = \varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = 1 - \frac{i}{t + 2i} - \frac{i}{t + 4i}.$$

Так как точка $z = 1$ принадлежит кольцу

$$2 < |z - 2i| < 4,$$

то функцию $\varphi(t)$ нужно разложить по степеням t в области $2 <$

$< |t| < 4$. Преобразуем функцию $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 1 - \frac{i}{t \left(1 + \frac{2i}{t}\right)} - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{t}{4i}\right)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 1 - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^n}{t^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{i^n 4^{n+1}}, \\ f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{2(z-2i)^n} + \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4i)^n} (z-2i)^n, \\ 2 &< |z-2i| < 4.\end{aligned}$$

Пример. Разложить функцию

$$f(z) = \left(\frac{z^2}{2} - 2z + \frac{5}{2} \right) \cos \frac{1}{z-2}$$

в ряд Лорана по степеням $z-2$ в кольце

$$D = \{z: 0 < |z-2| < \infty\}.$$

Решение. Пусть $z-2=t$, тогда

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2}(t^2+1) \cos \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^{2(n-1)}(2n)!} + \frac{(-1)^n}{t^{2n}(2n)!} \right) = \\ &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) \frac{1}{t^{2n}} = \\ &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n^2+6n+1)}{2(2n+2)!t^{2n}} = \\ &= \frac{1}{2}(z-2)^2 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n^2+6n+1)}{2(2n+2)!(z-2)^{2n}}.\end{aligned}$$

§ 2. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОГО ХАРАКТЕРА

Справочные сведения

1. Классификация изолированных особых точек.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $a \neq \infty$, т. е. в кольце

$$0 < |z - a| < \rho,$$

но не регулярна в точке a . Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера функции* $f(z)$.

Аналогично, бесконечно удаленная точка называется *изолированной особой точкой однозначного характера функции* $f(z)$, если эта функция регулярна в некоторой области

$$\rho < |z| < \infty.$$

В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи особой точки a различают три типа особых точек. Изолированная конечная или бесконечно удаленная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется

- 1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$;
- 2) *полюсом*, если существует бесконечный предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;
- 3) *существенно особой точкой*, если не существует (ни конечного, ни бесконечного) предела функции $f(z)$ в точке a .

2. Ряд Лорана в окрестности особой точки.

Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z - a| < \rho$, то ее можно представить в виде сходящегося в этом кольце ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (1)$$

который называют *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности*

точки a , а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \quad (2)$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (3)$$

называют соответственно *главной частью* и *правильной частью* ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a .

Аналогично, если функция регулярна в области $R < |z| < \infty$, то она представляется сходящимся в этой области рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad (4)$$

который называют *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности бесконечно удаленной точки*, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad (5)$$

$$f_2(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} \quad (6)$$

называют соответственно *главной* и *правильной частью* ряда (4).

Главные части (2) и (5) рядов Лорана (1) и (4) состоят из всех тех и только тех членов этих рядов, которые стремятся к бесконечности при $z \rightarrow a$ ($z \rightarrow \infty$). Функцию $f(z)$ называют регулярной в точке $z = \infty$, если эта функция регулярна в кольце $R < |z| < \infty$ и существует конечный $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

3. Устраняемая особая точка.

Для того чтобы конечная или бесконечно удаленная изолированная особая точка a была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты главной части ряда Лорана в окрестности точки a были равны нулю, т.е. $f_1(z) \equiv 0$. Если точка $z = a$, где $a \neq \infty$, является устранимой особой точкой

функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R,$$

то, полагая

$$f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0,$$

получаем функцию, регулярную в точке a . Поэтому нередко устранимую особую точку рассматривают как точку регулярности.

4. Полюс

4.1. Для того чтобы изолированная особая точка a (конечная и бесконечно удаленная) была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a содержала конечное число ненулевых слагаемых.

4.2. Полюс в конечной точке

- а) Точка $z = a$, где $a \neq \infty$, является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z) = (z-a)^{-m} h(z), \quad h(a) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке a . Число m называется *порядком полюса*.

Если точка $a \neq \infty$ — полюс функции $f(z)$, то его порядок — такое число $m \in \mathbb{N}$, что

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)^m = \alpha,$$

где $\alpha \neq 0$, или

$$f(z) \sim \frac{\alpha}{(z-a)^m}, \quad \alpha \neq 0 \quad (z \rightarrow a). \quad (8)$$

- б) Пусть $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z)$ и $h(z)$ — функции, регулярные в точке $a \neq \infty$. Тогда если $g(a) \neq 0$, а точка a — нуль кратности m функции $h(z)$, то $z = a$ — полюс m -го порядка функции $f(z)$; если точка a является нулем функций $g(z)$

и $h(z)$ кратности k и m соответственно, то при $m > k$ точка $z = a$ — полюс функции $f(z)$ кратности $m - k$, а при $m \leq k$ — устранимая особая точка.

4.3. Полюс в бесконечно удаленной точке

- а) Точка $z = \infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z) = z^m g(z), \quad g(\infty) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Число m в формуле (9) называется *порядком полюса* $z = \infty$.

Если $z = \infty$ — полюс функции $f(z)$, то его порядок m — такое число, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m} = \alpha$, где $\alpha \neq 0$, или

$$f(z) \sim \alpha z^m, \quad \alpha \neq 0 \quad (z \rightarrow \infty). \quad (10)$$

- б) Порядок m полюса $z = \infty$ функции $f(z)$ равен кратности нуля функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке $z = 0$.

5. Существенно особая точка

5.1. Для того чтобы изолированная особая точка a была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.

5.2. Теорема Сохоцкого. Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке a и такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

5.3. Теорема Пикара. Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, одного, уравнение $f(z) = A$ имеет в любой окрестности точки a бесконечное множество решений (корней).

6. Целые и мероморфные функции

6.1. Если функция $f(z)$ регулярна в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, то такая функция называется *целой*. Функция $f(z)$ называется

мероморфной, если на каждом ограниченном множестве $G \in \mathbb{C}$ эта функция регулярна, за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

6.2. Если $z = \infty$ — полюс порядка n целой функции $f(z)$, то $f(z)$ — многочлен степени n , а если целая функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то $f(z) = \text{const}$. Целую функцию, для которой $z = \infty$ — существенно особая точка, называют *целой трансцендентной*. Такими являются функции

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch} z.$$

6.3. Теорема Лиувилля для целой функции. Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет в области $R < |z| < \infty$ неравенству

$$|f(z)| \leq M|z|^m,$$

где $M > 0$, m — целое, $m \geq 0$, то $f(z)$ — многочлен степени не выше m .

Примеры с решениями

Пример. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид (тип), если: $f(z) = \frac{1}{\cos 1/z}$

$$1) f(z) = e^{1/z^2}; \quad 2) f(z) = \frac{z^6}{(z+1)^2(z^2+4)};$$

$$3) f(z) = \frac{1}{\cos 1/z}; \quad 4) f(z) = \frac{z-\pi}{\sin 2z-2\sin z};$$

$$5) f(z) = e^{1/\sin z}; \quad 6) f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z-1}.$$

Решение. 1) Функция e^{1/z^2} регулярна во всех точках $z \in \mathbb{C}$, кроме точки $z = 0$. Пусть $z = x + iy$, тогда если $z = x$, то $e^{1/x^2} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, а если $z = iy$, то $e^{-1/y^2} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$. Таким образом, функция e^{1/z^2} не имеет предела в точке $z = 0$ и поэтому $z = 0$ — существенно особая точка этой функции. Это можно установить, представив функцию e^{1/z^2} рядом Лорана в окрестности точки $z = 0$, т. е. рядом

$$e^{1/z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^{2n}}.$$

Главная часть этого ряда $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^{2n}}$ содержит бесконеч-

ное число ненулевых слагаемых.

Точка $z = \infty$ есть точка регулярности функции e^{1/z^2} , так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^{1/z^2} = 0.$$

Это утверждение равносильно тому, что функция e^{ζ^2} регулярна в точке $\zeta = 0$.

2) Нули функций $(z+1)^2$ и z^2+4 , т. е. точки $z_1 = -1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$ являются полюсами функции $f(z)$, причем z_1 — полюс второго порядка, а z_2 и z_3 — полюса первого порядка, так как эти точки не являются нулями функции z^6 , z_1 — нуль кратности 2 функции $(z+1)^2$, а z_2 и z_3 — нули кратности 1 функции z^2+4 .

Точка $z = \infty$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, так как $f(z)$ регулярна в области $|z| > 2$ и $f(z) \sim z^2$ при $z \rightarrow \infty$. Других особых точек в $\overline{\mathbb{C}}$ у функции $f(z)$ нет.

3) Нули функции $\cos \frac{1}{z}$, т. е. точки

$$z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются полюсами первого порядка. Действительно, если $\varphi(z) = \cos \frac{1}{z}$, то

$$\varphi'(z_k) = -\frac{1}{z_k^2} \sin \frac{1}{z_k} = \frac{(-1)^{n+1}}{z_k^2} \neq 0.$$

Точка $z = 0$ не является изолированной особой точкой. Она является предельной точкой (точкой накопления) полюсов z_k .

Точка $z = \infty$ — точка регулярности функции $f(z)$, так как функция $\frac{1}{\cos \zeta}$ регулярна в точке $\zeta = 0$. Других особых точек в $\overline{\mathbb{C}}$ у функции $f(z)$ нет.

4) Пусть $g(z) = \sin 2z - 2 \sin z$, тогда

$$g(z) = 2 \sin z (\cos z - 1).$$

Так как $z_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) — нули кратности 1 функции $\sin z$, а $\tilde{z}_m = 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) — нули кратности 1 функции $\cos z - 1$, то

$z'_n = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) — нули кратности 2 функции $g(z)$, а

$$z''_n = (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

— нули кратности 1 этой функции. Поэтому точки z'_n — полюсы второго порядка функции $f(z)$, а точки z''_n (кроме точки $z = \pi$) — полюсы первого порядка функции $f(z)$, так как $z = \pi$ — нуль функции $z - \pi$.

Точка $z = \infty$ является предельной точкой полюсов функции $f(z)$, а других особых точек (кроме перечисленных) у функции $f(z)$ в $\overline{\mathbb{C}}$ нет.

5) Покажем, что точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (нули функции $\sin z$) являются существенно особыми точками функции $f(z)$. Пусть $g(z) = \sin z$, тогда

$$g(z_k) = 0, \quad g'(z_k) = \cos k\pi = (-1)^k$$

и поэтому

$$\sin z = (-1)^k (z - k\pi) h(z), \quad \text{где} \quad h(k\pi) = 1.$$

Пусть $k = 2n$, тогда

$$\sin z = (z - 2\pi n) h(z).$$

Если $z = x$ и $x \rightarrow 2\pi n + 0$, то $\sin x \rightarrow +0$ и $f(x) \rightarrow +\infty$, а если $z = x$ и $x \rightarrow 2\pi - 0$, то $\sin x \rightarrow -0$ и $f(x) \rightarrow 0$. Таким образом, функция $f(z)$ не имеет предела при $z \rightarrow 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и точки $2\pi n$ — существенно особые.

Аналогично установим, что точки $(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, также являются существенно особыми. Итак, точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, — существенно особые точки функции $f(z)$, а точка $z = \infty$ — их предельная точка.

6) Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z(e^z - 1)}.$$

Нули функции $e^z - 1$, т.е. точки $z_k = 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) — полюсы первого порядка функции $f(z)$ (они не являются нулями функции $e^z - 1 - z$). Точка $z = 0$ — устранимая особая

точка, так как она является нулем второго порядка функций $e^z - 1 - z$ и $z(e^z - 1)$. Точка $z = \infty$ — предельная точка полюсов функции $f(z)$.

Пример.

Найти главную часть $f_1(z)$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a и определить вид особой точки a , если $f(z) = z \cos \frac{1}{z-1}$, $a = 1$

- 1) $f(z) = z^3 e^{1/z}$, $a = 0$; 2) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$, $a = i$;
3) $f(z) = z \cos \frac{1}{z-1}$, $a = 1$; 4) $f(z) = \frac{z^5+z^2}{z^2+4}$, $a = \infty$.

Решение. 1) Так как $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$, то

$$f(z) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}},$$

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)! z^n}.$$

Главная часть $f_1(z)$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых и поэтому $z = 0$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

2) $f(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^2}$,

$$h(z) = \frac{1}{(z+i)^2} = h(i) + h'(i)(z-i) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{(k)}(i)}{k!} (z-i)^k,$$

где $h(i) = -\frac{1}{4}$, $h'(i) = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}$, откуда

$$f_1(z) = \frac{h(i)}{(z-i)^2} + \frac{h'(i)}{z-i} = -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)},$$

а $z = i$ — полюс второго порядка функции $f(z)$.

3) Пусть $z-1 = t$, тогда $f(z) = \varphi(t) = (t+1) \cos \frac{1}{t}$. Представим функцию $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = 0$ ее рядом Лорана

$$\varphi(t) = (t+1) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! t^{2n}} \right).$$

Отсюда следует, что главная часть ряда Лорана функции $f(z)$

в окрестности точки $z = 1$ — ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}},$$

а $z = 1$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

4) Разделив многочлен $z^5 + z^2$ на многочлен $z^2 + 4$, представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = z^3 - 4z + \frac{z^2 + 16z}{z^2 + 4}.$$

Функция $g(z) = \frac{z^2 + 16z}{z^2 + 4}$ регулярна в точке $z = \infty$, так как она регулярна в области $|z| > 2$ и существует $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 1$.

Поэтому главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки есть сумма $z^3 - 4z$, а $z = \infty$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$.

Пример. Пусть $a \neq \infty$ — существенно особая точка функции $f(z)$ и полюс функции $g(z)$. Докажем, что $z = a$ — существенно особая точка функции $\varphi(z) = f(z)g(z)$.

Решение. Предположим противное. Тогда $z = a$ — либо устранимая особая точка, либо полюс функции $\varphi(z)$. Если $z = a$ — устранимая особая точка функции $\varphi(z)$, то существует конечный $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = A$. По условию $z = a$ — полюс функции $g(z)$ и поэтому $g(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$, $h(a) \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Но тогда функция

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{h(z)}(z-a)^m$$

имеет в точке a предел, равный нулю, что противоречит условию (функция $f(z)$ не имеет предела в точке a , так как для нее точка a является существенно особой). Если $z = a$ — полюс функции $\varphi(z)$, то

$$\varphi(z) = \frac{h_1(z)}{(z-a)^k}, \quad h_1(a) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

и тогда

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{h(z)}(z-a)^{m-k},$$

откуда следует, что при $m \geq k$ точка $z = a$ является устрани-

мой, а при $m < k$ — полюсом функции $f(z)$, что противоречит условию.

Итак, $z = a$ — существенно особая точка функции $\varphi(z)$.

Пример. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид: $f(z) = \frac{e^{1/z^3} \cos \frac{1}{z+1}}{\sin^3 z(z^4+1)^2}$

$$1) f(z) = \frac{e^{1/(i-z)}}{1+\sin \frac{\pi iz}{2}}; \quad 2) f(z) = \frac{e^{\operatorname{ctg} \pi z}}{(z^2-1)^2(\operatorname{ch} z+1)};$$

$$3) f(z) = \frac{e^{1/z^3} \cos \frac{1}{z+1}}{\sin^3 z(z^4+1)^2}; \quad 4) f(z) = \frac{(z^2+\pi^2) \operatorname{tg} z}{\operatorname{sh} z} (e^{\pi/(2z)} - e).$$

Решение. 1) Особыми точками функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ могут быть только точка $z = i$ и корни уравнения $\sin \frac{\pi iz}{2} = -1$ — точки z_k такие, что

$$\frac{\pi iz_k}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

откуда $z_k = i(1 - 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Точка i является существенно особой точкой функции $e^{1/(i-z)}$ и полюсом функции $\frac{1}{1+\sin(\frac{\pi iz}{2})}$.

Откуда следует (пример 3), что $z = i$ — существенно особая точка функции $f(z)$. Точки z_k ($k \neq 0$) — полюсы первого порядка функции $f(z)$, так как в силу условия $\cos \frac{\pi iz_k}{2} \neq 0$ они являются нулями кратности 1 функции $1 + \sin \frac{\pi iz}{2}$, а $z = \infty$ — предельная точка полюсов.

2) Особыми точками функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ могут быть только точки 1 и -1 , а также корни z_k уравнения $\sin \pi z = 0$ (числа $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$) и корни $\tilde{z}_k$ уравнения $\operatorname{ch} z = -1$, равносильного уравнению $e^z = -1$, откуда $\tilde{z}_k = i\pi + 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Точки $z_k = k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq \pm 1$) — существенно особые точки функции $f(z)$, точки $z = \pm 1$ также являются (пример 3) существенно особыми — это полюсы функции $\frac{1}{(z^2-1)^2(\operatorname{ch} z+1)}$.

Точки $\tilde{z}_k$ — полюсы первого порядка ($\operatorname{sh} z_k \neq 0$) функции $f(z)$. Точка $z = \infty$ — предельная точка для точек z_k и $\tilde{z}_k$.

3) Точка $z = 0$ — нуль функции $\sin z = 0$ (полюс функции $f(z)e^{-1/z^3}$) и существенно особая точка функции e^{-1/z^3} является существенно особой точкой функции $f(z)$ (пример 3).

Точка $z = -1$ также является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Корни уравнения

$$z^4 = -1,$$

т. е. точки $z_k = e^{i\pi(2k+1)/4}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) — полюсы второго порядка, а точки $\tilde{z}_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) — полюсы третьего порядка функции $f(z)$. Точка $z = \infty$ — предельная точка полюсов $\tilde{z}_k$.

4) Особыми точками в $\mathbb{C}$ могут быть только нули функций $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и точка $z = 0$. Точка $z = 0$ — существенно особая точка функций $e^{\pi/(2z)}$ и $f(z)$, точки $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) — нули кратности 1 функции $\cos z$ — являются полюсами первого порядка функции $f(z)$. Нули функции $\operatorname{sh} z$ — точки $\tilde{z}_k = k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq \pm 1$) — являются полюсами первого порядка функции $f(z)$, а $i\pi$ и $-i\pi$ — устранимые особые точки, $z = \infty$ — предельная точка полюсов $\tilde{z}_k$.

§ 3. Вычисление вычетов

Справочные сведения

1. Определение вычета

1.1. Вычет в конечной точке.

Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка однозначного характера функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z - a| < \rho$.

Если

$$\gamma_R = \{z: |z - a| = R\},$$

где $0 < R < \rho$ — положительно ориентированная окружность, то *вычетом функции $f(z)$ в точке a* называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} f(z) dz,$$

которое обозначается $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$. Итак,

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} f(z) dz. \quad (1)$$

Символ $\oint$ указывает на то, что обход контура совершается в положительном направлении (против часовой стрелки).

1.2. Вычет в бесконечно удаленной точке.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $|z| > \rho$ (точка $z = \infty$ является либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности функции $f(z)$). Тогда *вычетом функции $f(z)$ в бесконечности* называется число, определяемое формулой

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} f(z) dz, \quad 0 < \rho < R, \quad (2)$$

где $\gamma_R = \{z: |z| = R\}$ — окружность радиуса R , ориентированная по часовой стрелке (при обходе γ_R область $|z| > R$ остается слева).

Заметим, что если функция $f(z)$ регулярна в точке $a \neq \infty$, то $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$, а если функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то отсюда не следует, что ее вычет в бесконечности равен нулю ($\operatorname{res}_{z=\infty} 1/z = -1$).

2. Теорема о вычетах.

Если функция $f(z)$ регулярна в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая и вычет в точке $z = \infty$, равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (3)$$

3. Вычеты и ряд Лорана

3.1. Если функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a , т. е. в кольце $0 < |z - a| < \rho$, то она представляется в этом кольце рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad (4)$$

где $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ — главная часть ряда Лорана.

Тогда

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}, \quad (5)$$

т. е. вычет функции $f(z)$ в точке a равен коэффициенту ряда Лорана (4) при $\frac{1}{z-a}$.

3.2. Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ — ряд Лорана функции $f(z)$, регулярной в окрестности точки $z = \infty$ (в области $|z| > \rho$), то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_1, \quad (6)$$

т. е. вычет в точке $z = \infty$ равен коэффициенту этого ряда при $\frac{1}{z}$, взятому со знаком минус.

4. Формулы для вычета в конечной точке.

4.1. Полюс первого порядка.

Если $z = a$ ($a \neq \infty$) — полюс первого порядка (простой полюс) функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]. \quad (7)$$

Пусть $f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}$, где $h(z)$ и $\varphi(z)$ — функции, регулярные в точке a , причем

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{\varphi'(a)}. \quad (8)$$

В частности, если $\varphi(z) = z - a$, т. е.

$$f(z) = \frac{h(z)}{z - a},$$

то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = h(a). \quad (9)$$

4.2. Полюс порядка $m > 1$.

Если $z = a$ ($a \neq \infty$) — полюс порядка $m > 1$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}. \quad (10)$$

В частности, если

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}, \quad (11)$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке, и $h(a) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a), \quad (12)$$

т. е. вычет функции $f(z)$ в точке a равен коэффициенту при $(z-a)^{m-1}$ ряда Тейлора $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

5. Формулы для вычета в бесконечно удаленной точке.

5.1. Если функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z(f(\infty) - f(z))]. \quad (13)$$

5.2. Пусть $z = \infty$ — нуль порядка k функции $f(z)$, тогда

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k} \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad A \neq 0. \quad (14)$$

Если в асимптотической формуле (14) $k = 1$, то

$$f(z) \sim \frac{A}{z} \quad \text{и тогда} \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -A, \quad (14)$$

а если $k \geq 2$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

5.3. Если функция $f(z)$ представлена в виде $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, где функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в точке $\zeta = 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0). \quad (15)$$

Примеры с решениями

Пример. $f(z) = \frac{2\cos z - \cos^3 z}{\sin z}$, $a = \pi$ Найти $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$, если:

- 1) $f(z) = \frac{z^2+7z}{z^2-z-2}$, $a = -1$; 2) $f(z) = ze^{1/z^2}$, $a = \infty$;
 3) $f(z) = \frac{2\cos z - \cos^3 z}{\sin z}$, $a = \pi$; 4) $f(z) = \frac{z^3+2z^2+3z}{(z-1)^3}$, $a = 1$;
 5) $f(z) = \frac{1}{z(e^{2z}-1)}$, $a = 0$; 6) $f(z) = e^{z/(1-z)}$, $a = 1$ и $a = \infty$;
 7) $f(z) = z \sin \frac{z+1}{z-1}$, $a = 1$; 8) $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $a = \infty$.

Решение. 1) Так как

$$z^2 - z - 2 = (z+1)(z-2),$$

то $f(z) = \frac{g(z)}{z+1}$, где $g(z) = \frac{z^2+7z}{z-2}$. По формуле (9), где $g(-1) = 2$, находим

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = g(-1) = 2.$$

2) Функция $f(z)$ представляется в области $D = \{z: 0 < |z| < \infty\}$ рядом Лорана

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n-1}},$$

в котором коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен 1. По формуле (6) находим $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

3) Точка $z = \pi$ — полюс первого порядка функции $f(z)$, так как $z = \pi$ — нуль кратности 1 функции $\sin z$. Пусть

$$h(z) = 2\cos z - \cos^3 z, \quad \varphi(z) = \sin z.$$

Тогда по формуле (8), где $h(\pi) = -1$, $\varphi'(\pi) = -1$, находим $\operatorname{res}_{z=\pi} f(z) = 1$.

4) Точка $z = 1$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$.
Пусть

$$h(z) = z^3 + 2z^2 + 3z,$$

тогда по формуле (12), где $h''(z) = 6z + 4$, $h''(1) = 10$, находим

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{h''(1)}{2} = 5.$$

5) Точка $z = 0$ — полюс второго порядка функции $f(z)$.
Воспользуемся формулой (10). Найдем

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{e^{2z} - 1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} - 1 - 2ze^{2z}}{(e^{2z} - 1)^2}.$$

Применяя формулу Тейлора для функции e^{2z} , получаем

$$e^{2z} - 1 - 2ze^{2z} = -2z^2 + \dots, \quad (e^{2z} - 1)^2 = 4z^2 + \dots,$$

поэтому искомый предел равен $-\frac{1}{2}$ и $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}$.

6) Так как $\frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1}$, то

$$f(z) = e^{-1} \cdot e^{-1/(z-1)} = e^{-1} \left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \dots \right),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = -e^{-1}.$$

Функция $f(z)$ имеет в $\mathbb{C}$ единственную изолированную особую точку $z = 1$ и регулярна в области $1 < |z| < \infty$. По теореме о вычетах (формула (3))

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=1} f(z) = e^{-1}.$$

7) Положим $t = z - 1$, тогда

$$f(z) = (t+1) \sin \left(1 + \frac{2}{t} \right) = \varphi(t)$$

и

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \operatorname{res}_{t=0} \varphi(z).$$

Найдем коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{t}$ ряда Лорана

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (t+1) \left(\sin 1 \cdot \cos \frac{2}{t} + \cos 1 \cdot \sin \frac{2}{t} \right) = \\ &= (t+1) \left[\sin 1 \left(1 - \frac{2}{t^2} + \dots \right) + \cos 1 \left(\frac{2}{t} - \frac{4}{3t^3} + \dots \right) \right].\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $c_{-1} = 2 \cos 1 - 2 \sin 1$ и $\operatorname{res}_{z=1} f(z) = 2(\cos 1 - \sin 1)$.

8) Функция $f(z)$ регулярна в области $2 < |z| < \infty$, а точка $z = \infty$ является для этой функции нулем кратности 1, причем $f(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \rightarrow \infty$. Это означает, что коэффициент ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ равен 1 и поэтому $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Пример. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее конечных особых точках и в бесконечности, если: $f(z) = \frac{z^3}{z+1} e^{1/z}$

$$1) f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}; \quad 2) f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-\pi)};$$

$$3) f(z) = \frac{z^3}{z+1} e^{1/z}; \quad 4) f(z) = \frac{1}{z^2-4} \cos \frac{z-1}{z+1}.$$

Решение. 1) Нулями функции $z^4 + 1$, т. е. корнями уравнения $z^4 = -1$, являются числа $z_k = e^{i\pi + 2k\pi/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, и точки z_k — полюсы первого порядка функции $f(z)$. По формуле (8) находим

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z_k^4}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4},$$

где

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = \frac{i-1}{\sqrt{2}}, \\ z_2 &= -z_0 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

По теореме о вычетах

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = - \sum_{k=0}^3 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Этот результат также следует из того, что ряд Лорана функ-

ции $f(z)$ в окрестности бесконечности содержит только члены вида $c_{2k}z^{2k}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2) Точка $z = 0$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, а точка $z = \pi$ — устранимая особая точка этой функции (точка регулярности). Других особых точек в конечной плоскости у функции $f(z)$ нет. Найдем коэффициент c_{-1} ряда Лорана при $\frac{1}{z}$ функции $f(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots \right) \left(-\frac{1}{\pi} \right) \left(1 - \frac{z}{\pi} \right)^{-1} = \\ &= -\frac{1}{\pi z^2} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots \right) \left(1 + \frac{z}{\pi} + \frac{z^2}{\pi^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда $c_{-1} = -\frac{1}{\pi^2}$ и $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{\pi^2}$.

Далее, $\operatorname{res}_{z=\pi} f(z) = 0$, а $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{\pi^2}$.

3) В конечной плоскости функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки: $z = -1$ (полюс первого порядка) и существенно особую точку $z = 0$.

По формуле (8) находим $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -e^{-1}$. Для нахождения вычета в бесконечности воспользуемся разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{-1} e^{1/z} = \\ &= z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда находим, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 - 1$, т. е. $c_{-1} = -\frac{1}{3}$. Поэтому $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{3}$. По теореме о вычетах

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname{res}_{z=-1} f(z) - \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = e^{-1} - \frac{1}{3}.$$

4) В конечной плоскости функция $f(z)$ имеет три особые точки: $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$ — полюсы первого порядка, $z = -1$ — существенно особая точка.

По формуле (9) находим

$$\operatorname{res}_{z=2} f(z) = g(2),$$

где

$$g(z) = \frac{1}{z+2} \cos \frac{z-1}{z+1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{4} \cos \frac{1}{3}.$$

Аналогично находим

$$\operatorname{res}_{z=-2} f(z) = -\frac{1}{4} \cos 3.$$

Функция $f(z)$ регулярна в бесконечности и имеет там нуль второго порядка ($f(z) \sim \cos 1/z^2$ при $z \rightarrow \infty$). Поэтому $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. По теореме о вычетах

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\operatorname{res}_{z=2} f(z) - \operatorname{res}_{z=-2} f(z) = \frac{1}{4} \left(\cos 3 - \cos \frac{1}{3} \right). \quad \blacktriangle$$

Пример.

Пусть

$$\begin{aligned} P_n(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \\ Q_n(z) &= b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0, \end{aligned}$$

где $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, т. е. $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены степени n .

Найдем $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$, где $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$.

Решение. Функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$. Для нахождения искомого вычета воспользуемся формулой (13), где $f(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$. Тогда

$$z(f(\infty) - f(z)) = z \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0} \right) = \varphi(z)$$

или

$$\varphi(z) = z \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^n}} \right) = \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2} + h(z),$$

где $h(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, откуда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2} = \operatorname{res}_{z=\infty} f(z). \quad \blacktriangle$$

§ 4. Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Справочные сведения

При вычислении интегралов по замкнутым контурам применяется следующая теорема.

Теорема Коши о вычетах. Пусть D — область в $\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей Γ , а функция $f(z)$ регулярна в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$ ($k = 1, 2, \dots, n$) (к их числу относится и точка $z = \infty$, если $\infty \in D$), кроме того, функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы Γ области D . Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z),$$

где Γ^+ — положительно ориентированная относительно области D кривая Γ .

Следствие. (теорема о полной сумме вычетов) Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \dots, a_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Примеры с решениями

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z + 1} dz.$$

Решение. Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $e^z + 1 = 0$, т.е. точки $z_k = \pi i + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из них внутри круга $\{z: |z| < 4\}$ лежат только точки $z_0 = \pi i$ и $z_{-1} = -\pi i$. Следовательно, по теореме о вычетах

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) + \operatorname{res}_{z=-\pi i} f(z) \right).$$

Так как точки $\pm \pi i$ — полюсы первого порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=\pm \pi i} f(z) = \frac{z^4}{(e^z + 1)'} \Big|_{z=\pm \pi i} = \frac{z^4}{e^z} \Big|_{z=\pm \pi i} = -\pi^4,$$

откуда находим $I = 2\pi i(-\pi^4 - \pi^4) = -4\pi^5 i$.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2 \cdot (1-\cos z)}.$$

Решение. Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $\cos z = 1$, т.е. точки $z_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а также точка $\tilde{z} = 1$.

Из них внутри круга $\{z: |z| < 3\}$ лежат только точки $\tilde{z} = 1$ и $z_0 = 0$. Следовательно, по теореме о вычетах

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=1} f(z) + \operatorname{res}_{z=0} f(z) \right).$$

Так как $\tilde{z} = 1$ — полюс второго порядка для функции $f(z)$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} (f(z)(z-1)^2)' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-\cos z} \right)' = \\ &= - \frac{\sin z}{(1-\cos z)^2} \Big|_{z=1} = - \frac{\sin 1}{(1-\cos 1)^2}. \end{aligned}$$

Хотя точка $z_0 = 0$ также является полюсом второго порядка для $f(z)$, но вычет в ней удобнее находить, вычислив коэффициент c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки 0.

Так как

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)' = 1 + 2z + 3z^2 + \dots; \\ \frac{1}{1 - \cos z} &= \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)} = \\ &= \frac{1}{\frac{z^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{12} + \dots\right)} = \frac{2}{z^2} \left(1 + \frac{z^2}{12} - \dots\right),\end{aligned}$$

то при перемножении этих рядов получим

$$(1 + 2z + 3z^2 + \dots) \cdot \left(\frac{2}{z^2} + \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z} + 6 + \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k,$$

откуда $c_{-1} = 4$. Следовательно,

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 4, \quad I = 2\pi i \left(4 - \frac{\sin 1}{(1 - \cos 1)^2}\right). \quad \blacktriangle$$

Замечание. В примерах 1, 2 нельзя использовать при вычислении интегралов вычет в бесконечности (см. способ 2 примера 3), так как в этих примерах точка ∞ является неизолированной особой точкой для подынтегральных функций.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^2-9} \sin \frac{1}{z} dz.$$

Решение. У подынтегральной функции $f(z) = \frac{z^2}{z^2-9} \sin \frac{1}{z}$ всего четыре особые точки: $z_0 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = -3$, $z_3 = \infty$. В соответствии с этим интеграл I можно вычислить двумя способами.

1 способ.

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} f(z).$$

Точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой для $f(z)$. Чтобы найти вычет в точке z_0 , вычислим коэффициент c_{-1} ряда

Лорана в окрестности $z_0 = 0$. Так как

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{z} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \frac{1}{7! \cdot z^7} + \dots; \\ \frac{z^2}{z^2 - 9} &= -\frac{z^2}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{9}} = -\frac{z^2}{9} \left(1 + \frac{z^2}{9} + \frac{z^4}{9^2} + \dots \right) = \\ &= -\frac{z^2}{9} - \frac{z^4}{9^2} - \frac{z^6}{9^3} - \dots,\end{aligned}$$

то, перемножив полученные ряды, находим

$$\begin{aligned}f(z) &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \frac{1}{7! \cdot z^7} + \dots \right) \times \\ &\quad \times \left(-\frac{z^2}{9} - \frac{z^4}{9^2} - \frac{z^6}{9^3} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{3! \cdot 9} - \frac{1}{5! \cdot 9^2} + \frac{1}{7! \cdot 9^3} - \dots \right) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{+\infty} c_k z^k,\end{aligned}$$

откуда

$$c_{-1} = \frac{1}{3! \cdot 9} - \frac{1}{5! \cdot 9^2} + \frac{1}{7! \cdot 9^3} - \dots = \frac{1}{3! \cdot 3^2} - \frac{1}{5! \cdot 3^4} + \frac{1}{7! \cdot 3^6} - \dots.$$

Так как

$$\sin \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3! \cdot 3^3} + \frac{1}{5! \cdot 3^5} - \dots,$$

то

$$c_{-1} = -\left(\sin \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot 3 = 1 - 3 \sin \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $I = 2\pi i \cdot c_{-1} = 2\pi i(1 - 3 \sin \frac{1}{3})$.

2 способ. По теореме о вычетах для области $D = \{z: |z + i| > 2\}$ имеем

$$I = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=3} f(z) + \operatorname{res}_{z=-3} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \right).$$

Точки ± 3 являются полюсами первого порядка для функции $f(z)$ в области D , найдем вычеты функции в этих точках

$$\operatorname{res}_{z=\pm 3} f(z) = \frac{z^2 \sin \frac{1}{z}}{(z^2 - 9)'} \bigg|_{z=\pm 3} = \frac{z^2 \sin \frac{1}{z}}{2z} \bigg|_{z=\pm 3} = \pm \frac{3}{2} \sin \left(\pm \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} \sin \frac{1}{3}.$$

Точка ∞ является устранимым нулем первого порядка функции $f(z)$, причем $f(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \rightarrow \infty$, откуда $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Следовательно,

$$I = -2\pi i \left(\frac{3}{2} \sin \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \sin \frac{1}{3} - 1 \right) = 2\pi i \left(1 - 3 \sin \frac{1}{3} \right). \quad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z|=7} \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z^3 + 4\pi^2 z} dz.$$

Решение. Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение

$$z(z^2 + 4\pi^2) = 0,$$

откуда $z_0 = 0$, $z_1 = 2\pi i$, $z_2 = -2\pi i$.

Точки $\pm 2\pi i$ являются нулями числителя первого порядка ($1 - \operatorname{ch}(\pm 2\pi i) = 0$, $-\operatorname{sh}(\pm 2\pi i) \neq 0$), а также нулями знаменателя первого порядка. Поэтому эти точки являются устранимыми для $f(z)$. Значит, $\operatorname{res}_{z=\pm 2\pi i} f(z) = 0$.

Точка $z_0 = 0$ является нулем числителя второго порядка ($1 - \operatorname{ch} 0 = 0$, $-\operatorname{sh} 0 = 0$, $-\operatorname{ch} 0 \neq 0$) и нулем знаменателя первого порядка. Поэтому эта точка также является устранимой и $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$. В итоге по теореме о вычетах для круга $\{z: |z| < 7\}$ получаем

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=2\pi i} f(z) + \operatorname{res}_{z=-2\pi i} f(z) \right) = 0. \quad \blacktriangle$$

Замечание. Вычисление интеграла в примере 4 вторым способом по теореме о вычетах для внешности круга было возможно, но более сложно, чем вычисление первым способом.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{z^4}{1-z^8} dz.$$

Решение. Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $z^8 = 1$ (восемь полюсов первого порядка на окружности $\{z: |z| = 1\}$).

Поскольку вне круга $\{z: |z| < 4\}$ находится только одна особая точка $z_0 = \infty$, то в данном примере удобнее вычислить интеграл с помощью вычета функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Заметим, что $f(z)$ — четная функция и ее ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ содержит только четные степени z . Поэтому коэффициент этого ряда при $\frac{1}{z}$ равен нулю и $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Следовательно, $I = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}.$$

Решение. Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение $e^{2/z} = e^{1/z}$ или $e^{1/z} = 1$, откуда $\frac{1}{z} = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, т. е.

$$z_k = \frac{1}{2\pi i k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.$$

Кроме того, особой является точка $z_0 = 0$ — предельная точка полюсов z_k .

Следовательно, теорему о вычетах можно использовать только для области $D = \{z: |z| > 1\}$, в которой лежит лишь одна особая точка $\tilde{z} = \infty$. Учитывая, что

$$I = - \oint_{|z|=1} f(z) dz,$$

получаем $I = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$.

Для данной функции $f(z)$ точка $z = \infty$ — полюс первого порядка и поэтому ее ряд Лорана в окрестности ∞ имеет вид

$$f(z) = Az + B + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

Пусть $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, тогда

$$\varphi(z) = \frac{A}{z} + B + c_{-1}z + \dots$$

Для нахождения c_{-1} нужно найти коэффициент при z ряда Лорана функции $\varphi(z)$ в окрестности точки $z = 0$. В данном примере

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{e^{-z}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} \left(1 - z + \frac{z^2}{2} + \dots\right) \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{z} \left(1 - z + \frac{z^2}{2} + \dots\right) \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \dots\right).\end{aligned}$$

Нужно найти коэффициент при z^2 в произведении выражений в скобках. Он равен $\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$.

Итак, $c_{-1} = \frac{13}{12}$ и $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{13}{12}$.

Тогда

$$I = -2\pi i \left(-\frac{13}{12}\right) = \frac{13\pi i}{6}.$$

▲

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin \varphi}, \quad a > 1.$$

Решение. Пусть $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, тогда

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Интеграл I сводится к интегралу по замкнутому контуру

$\{z: |z| = 1\}$:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(a + \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение

$$z^2 + 2iaz - 1 = 0.$$

Так как $D = -4a^2 + 4 = 4(1 - a^2)$, то

$$z_{1,2} = \frac{-2ia \pm 2i\sqrt{a^2 - 1}}{2} = -i(a \mp \sqrt{a^2 - 1}).$$

Внутри круга $\{z: |z| < 1\}$ лежит только одна особая точка

$$z_1 = i(\sqrt{a^2 - 1} - a).$$

Точка z_1 — полюс первого порядка для $f(z)$. Поэтому

$$\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2}{(z^2 + 2iaz - 1)'} \Big|_{z=z_1} = \frac{2}{2z + 2ai} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}},$$

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} f = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \blacktriangle$$

§ 5. Вычисление значений регулярных ветвей многозначных функций. Ряды Лорана для регулярных ветвей

Справочные сведения

Если многозначная функция допускает выделение регулярной ветви в области G , то таких ветвей, как правило, больше одной. Для выделения из всего множества регулярных ветвей одной определенной ветви нужно еще какое-либо дополнительное условие. Обычно таким условием является задание значения ветви в некоторой точке области G .

1. Значения на одной регулярной ветви.

Допустим, что в области G задана регулярная функция $f(z)$, такая, что $f(z) \neq 0$ при любом $z \in G$. Пусть существуют в области G регулярные ветви $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ и $g(z) \in \{\sqrt[n]{f(z)}\}$ (условия существования таких ветвей содержатся в справочных сведениях предыдущего параграфа). Тогда для любых точек $a, b \in G$ справедливы выражения

$$h(b) = h(a) + \ln \left| \frac{f(b)}{f(a)} \right| + i\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z), \quad (1)$$

$$g(b) = g(a) \cdot \sqrt[n]{\left| \frac{f(b)}{f(a)} \right|} e^{(i/n)\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)}, \quad (2)$$

где γ_{ab} — произвольная, лежащая в области G кусочно гладкая ориентированная кривая с началом в точке a и концом в точке b .

2. Производная регулярной ветви.

Производные регулярных ветвей $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ и $g(z) \in \{\sqrt[n]{f(z)}\}$ в области G вычисляются по формулам

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad g'(z) = \frac{f'(z)}{n(g(z))^{n-1}}. \quad (3)$$

3. Ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей.

В соответствии с общими свойствами регулярных функций регулярные ветви многозначных функций могут быть представлены в виде рядов Тейлора и Лорана.

Примеры с решениями

Пример. Пусть $h_k(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1+z)$ в области $G = \{z: |z| < 1\}$, такая, что $h_k(0) = 2\pi ik$. Разложить функцию $h_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в области G .

Решение. По формуле (3) получаем, что $h'_k(z) = \frac{1}{1+z}$. Отсюда легко вычислить и остальные производные:

$$h''_k(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \quad \dots, \quad h^{(n)}_k(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Вычисляя коэффициенты c_n ряда Тейлора по формуле $c_n = \frac{h^{(n)}_k(0)}{n!}$, получаем искомый ряд:

$$h_k(z) = h_k(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \quad (4)$$

▲

Пример. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, и $\varphi_k(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{(1+z)^a\}$ в области $G = \{z: |z| < 1\}$, такая, что

$$\varphi_k(0) = e^{2\pi i a k}.$$

Разложить каждую функцию $\varphi_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в области G .

Решение. По определению многозначной функции

$$\{(1+z)^a\} = e^{a \operatorname{Ln}(1+z)}$$

существует регулярная ветвь $h_k(z) \in \operatorname{Ln}(1+z)$ в области G , такая, что

$$\varphi_k(z) = e^{a h_k(z)}, \quad h_k(0) = 2\pi i k.$$

Дифференцируя сложную функцию, получаем

$$\varphi'_k(z) = \varphi_k(z) \frac{a}{1+z}, \quad \dots, \quad \varphi^{(n)}_k(z) = \varphi_k(z) \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(1+z)^n}.$$

Вычисляя коэффициенты c_n ряда Тейлора, получаем

$$\varphi_k(z) = \varphi_k(0) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} C^n_a z^n, \quad |z| < 1, \quad (5)$$

где $C^n_a = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$.

Пример. Разложить в ряд Тейлора по степеням z регулярную ветвь $g(z)$ многозначной функции $\{\sqrt[3]{1-z^2}\}$ в области $G = \{z: |z| < 1\}$ с начальным значением $g(0) = e^{2\pi i/3}$.

Решение. По формуле (5) при $a = \frac{1}{3}$ и делая замену $\zeta = -z^2$, сразу получаем ответ:

$$g(z) = e^{2\pi i/3} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^n (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1. \quad \blacktriangle$$

Пример. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\text{Ln } \frac{1-z}{1+z}$ в области $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, такая, что предельное значение

$$h(0+i0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} h(iy) = 0.$$

Найти значения $h(0-i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Разложить функцию $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности бесконечности и указать кольцо сходимости этого ряда.

Решение. Прежде всего отметим, что такая регулярная ветвь $h(z)$ существует и единственна в данной области G , так как выполнены все условия существования ветвей (см. справочные сведения из §§ 16 и 17). В том числе для любой замкнутой ориентированной простой кусочно гладкой кривой $\gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z} = \Delta_\gamma \arg(z-1) - \Delta_\gamma \arg(z+1) = 0.$$

По формуле (1) вычислим значения $h(0-i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Выберем кривую $\gamma_1 = \{z: |z+1| = 1\}$ с началом в точке $0+i0$ (на верхнем краю границы $[-1, 1]$) и концом в точке $0-i0$ (на нижнем краю границы $[-1, 1]$). Тогда

$$\begin{aligned} h(0-i0) &= h(0+i0) + \ln \left| \frac{1}{1} \right| + \\ &+ i(\Delta_{\gamma_1} \arg(z-1) - \Delta_{\gamma_1} \arg(z+1)) = i(0-2\pi) = -2\pi i. \end{aligned}$$

Выбирая отрезок мнимой оси $\gamma_2 = [0, i]$ с началом в точке $0+i0$

и концом в точке i , получаем

$$h(i) = h(0 + i0) + \ln \left| \frac{1 - i}{1 + i} \right| + \\ + i(\Delta_{\gamma_2} \arg(z - 1) - \Delta_{\gamma_2} \arg(z + 1)) = i \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = -i\frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления $h(\infty)$ выберем произвольное действительное число $x > 1$ и вычислим вначале значение $h(x)$. Для этого возьмем соответствующую кривую γ_3 с началом в точке $0 + i0$ и концом в точке x . По формуле (1) получаем

$$h(x) = h(0 + i0) + \ln \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right| + \\ + i(\Delta_{\gamma_3} \arg(z - 1) - \Delta_{\gamma_3} \arg(z + 1)) = \ln \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right| + i(-\pi + 0),$$

откуда $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(+\infty) = -i\pi$. Так как ∞ является изолированной особой точкой регулярной функции $h(z)$, то из равенства заключаем, что ∞ есть устранимая особая точка и $h(\infty) = -i\pi$.

Для разложения функции $h(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности представим в G многозначную функцию в виде

$$\operatorname{Ln} \frac{1 - z}{1 + z} = \operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{1}{z} \right) - \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \\ = \operatorname{Ln}(-1) + h_1(z) - h_2(z). \quad (6)$$

В последнем выражении многозначность содержится в первом слагаемом, а функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ однозначны, причем $h_1(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} \left(1 - \frac{1}{z} \right)$ в данной области G и такая, что $h_1(\infty) = 0$, а $h_2(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} \left(1 + \frac{1}{z} \right)$ в области G , такая, что $h_2(\infty) = 0$. Делая замену $\zeta = \frac{1}{z}$, легко убедиться, что такие регулярные ветви в области G существуют, а в силу примера 1 получаем выражения

для их рядов Лорана (см. (4)):

$$h_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{z}\right)^n, \quad |z| > 1;$$

$$h_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad |z| > 1.$$

Из определения функции $h(z)$ как ветви многозначной функции $\text{Ln} \frac{1-z}{1+z}$ и из выражения (6) получаем

$$h(z) - h_1(z) + h_2(z) \in \text{Ln}(-1),$$

$$\text{т. е. } h(z) - h_1(z) + h_2(z) = i(\pi + 2\pi k(z)),$$

где $k(z)$ принимает целочисленные значения. Так как в равенстве слева стоят непрерывные функции, то $k(z) = k_0 = \text{const}$. Переходя к пределу при $z \rightarrow \infty$, получаем $h(\infty) = i(\pi + 2\pi k_0)$, т. е. $h(z) = h_1(z) - h_2(z) + h(\infty)$ при $|z| > 1$. Отсюда получаем ряд Лорана (в силу его единственности) функции h вида

$$h(z) = -i\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n} \cdot \frac{1}{z^n} = -i\pi - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} z^{-2k-1}$$

в кольце сходимости $|z| > 1$.

§ 6. Интегралы от регулярных ветвей

Справочные сведения

Интегралы от регулярных ветвей многозначных функций находятся с помощью вычисления значений регулярных ветвей многозначных функций, разложений этих ветвей в ряды Лорана и с использованием теории вычетов.

Примеры с решениями

Пример. Пусть регулярная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\{\sqrt{z^2 - 4}\}$ определена в области G , представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности $\{z: |z| = 2, \text{Im } z \geq 0\}$ (рис. 6.1), причем главная часть ряда Лорана

функции $g(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z . Вычислить интеграл

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

Решение. Прежде всего следует проверить, что в заданной области G действительно существуют регулярные ветви функции $\{\sqrt{z^2 - 4}\}$. (Сделайте это самостоятельно.)

Для вычисления интеграла J по теории вычетов надо найти особые точки подынтегральной функции, т. е. точки, в которых справедливо равенство $g(z) = 3z$. Чтобы их найти, замечаем, что из последнего равенства следует $g^2(z) = (3z)^2$. Так как по определению корня $g^2(z) = z^2 - 4$, то получаем равенство $z^2 - 4 = 9z^2$, т. е. $z_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ — точки, в которых возможно равенство $g(z) = 3z$.

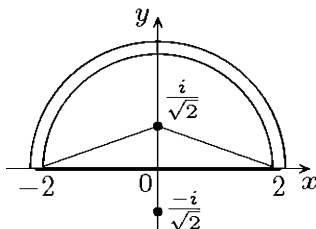


Рис. 6.1

Уточним значения $g\left(\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$. Для этого удобно вначале вычислить значение функции g в конечной точке, например в точке $z = 0$. Допустим, что мы знаем значение $g(0)$. Тогда для любого действительного числа $x > 2$ вычислим значение $g(x)$ по формуле (2) из § 18:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) \sqrt{\left| \frac{x^2 - 4}{4} \right|} e^{i/2(\Delta_\gamma \arg(z-2) + \Delta_\gamma \arg(z+2))} = \\ &= g(0) \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} e^{i/2(\pi+0)} = \frac{i}{2} g(0) \cdot x \left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Последнее равенство записано с помощью формулы Тейлора

для функции действительного переменного. По теореме о единственности регулярной функции отсюда следует, что

$$g(z) = \frac{i}{2}g(0)\left(z - \frac{2}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad z \in G.$$

Так как по условию задачи главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в ∞ равна z , отсюда получаем, что $g(0) = -2i$. Теперь легко вычислить значения $g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ и $g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ по той же формуле (2) из § 18:

$$g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -2i\sqrt{\left|\frac{-(1/2) - 4}{4}\right|}e^{(i/2)(-\operatorname{arccctg} 2\sqrt{2} + \operatorname{arccctg} 2\sqrt{2})} = -\frac{3i}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично получаем, что

$$g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3i}{\sqrt{2}},$$

т.е. равенство $g(z) = 3z$ справедливо в точке $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$. Так как $g'(z) = \frac{z}{g(z)}$, то $g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \neq 3$. Таким образом, точка $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ есть полюс первого порядка подынтегральной функции $f(z) = \frac{1}{g(z)-3z}$. В итоге вычисляем интеграл по теореме о вычетах

$$J = 2\pi i \operatorname{res}_{-i/\sqrt{2}} f = 2\pi i \frac{1}{g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) - 3} = -\frac{3\pi i}{4}. \quad \blacktriangle$$

§ 7. Вычисление несобственных интегралов

Справочные сведения

1. Метод вычисления несобственных интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах (см. § 14) состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции $f(x)$ по какому-либо (конечному или бесконечному) интервалу (a, b) оси $\mathbb{R}$. Тогда (a, b) дополняется какой-нибудь кривой Γ , которая

вместе с интервалом (a, b) ограничивает некоторую область D в $\mathbb{C}$. Если функция $f(x)$ регулярно продолжается в D (и непрерывно в $\overline{D}$), за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$, $k = 1, 2, \dots, n$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_a^b f(x) dx + \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f(z) \right).$$

Тогда исходный интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ удастся вычислить, если удастся вычислить интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$ или выразить его через I .

2. Заметим, что в теореме Коши ∂D (граница области D) должна иметь конечную длину. Если $(a, b) = \mathbb{R}$, то часто удобно выбирать отрезок $[-R, R]$ действительной оси, а в качестве дополняющей кривой Γ — полуокружность $\Gamma = \Gamma_R$ радиуса $R > 0$, расположенную в верхней полуплоскости (рис. 7.1), т. е.

$$\Gamma_R = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

При этом может быть использована следующая теорема.

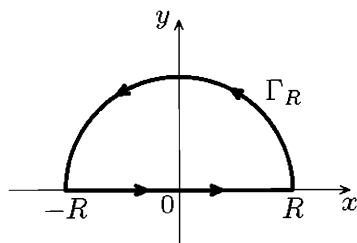


Рис. 7.1

Теорема. Пусть функция f регулярна в верхней полуплоскости $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \dots, a_n$ и непрерывна вплоть

до действительной оси. Тогда если

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0, \quad (1)$$

где $\Gamma_R = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, то

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f(z) \right). \quad (2)$$

Замечание. Существование несобственного интеграла (2) здесь можно гарантировать лишь в смысле главного значения по Коши.

3. Укажем случаи, в которых выполнено условие (1) теоремы 1.

Случай 1.

Лемма. Пусть функция $f(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z: \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ и пусть

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} RM(R) = 0, \quad \text{где } M(R) = \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)|.$$

Тогда $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$, где $\Gamma_R = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Замечание. Лемма 1 применима, например, в случае, когда $f(z)$ — рациональная функция, т. е. $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены степеней n и m соответственно.

Если $m \geq n + 2$, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится как несобственный и знак $v.p.$ в формуле (2) можно опустить. При этом предполагается, что $Q_m(z) \neq 0$ на действительной оси. Для указанного случая формула (2) примет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (3)$$

В формуле (3) содержатся вычеты по всем полюсам функции $R(z)$, расположенным в верхней полуплоскости.

Случай 2.

Лемма. (Жордана) Пусть функция $g(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z: \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ и пусть $\lim_{R \rightarrow +\infty} M(R) = 0$, где

$$M(R) = \max_{z \in \Gamma_R} |g(z)|, \quad \Gamma_R = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Тогда если $\alpha > 0$, то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

С помощью леммы Жордана можно вычислять интегралы вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x \cdot g(x) dx \quad \text{и} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x \cdot g(x) dx,$$

где $g(x)$ — рациональная функция, т. е. $g(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно, причем $m \geq n + 1$. В этом случае интегралы сходятся как несобственные, а формулу (2) можно записать в виде

$$I_1 + iI_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} (g(z) e^{i\alpha z}). \quad (4)$$

В равенстве (4) содержатся вычеты по всем полюсам функции $g(z) e^{i\alpha z}$, расположенным в верхней полуплоскости.

Примеры с решениями

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Решение. Функция $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ удовлетворяет условиям леммы 1 и имеет в области D (рис. 7.1), ограниченной кривой Γ_R

($R > 1$) и отрезком $[-R, R]$, только две особые точки

$$z_1 = e^{i\pi/4} \quad \text{и} \quad z_2 = e^{i3\pi/4},$$

которые являются полюсами первого порядка.

Так как $\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=z_k} = \frac{1}{4z_k}$, $k = 1, 2$, то по формуле (3) находим

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) \right) = \frac{2\pi i}{4} \left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4} \right) = \\ &= \frac{\pi e^{i\pi/2}}{2} \left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4} \right) = \pi \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2} = \pi \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}.$$

Решение. Как и в примере 1, в области D , ограниченной полуокружностью Γ_R и отрезком $[-R, R]$, применима лемма 1 (замечание 2) к функции $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^3}$, имеющей в верхней полуплоскости $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ единственную особую точку $z_1 = 2i$ — полюс третьего порядка. По формуле (3) находим $I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} f(z)$.

Так как $f(z) = \frac{h(z)}{(z-2i)^3}$, где $h(z) = (z+2i)^{-3}$, то

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \frac{1}{2} h''(2i) = \frac{(-3)(-4)}{2} (z+2i)^{-5} \Big|_{z=2i} = \frac{3}{2 \cdot 4^4 i},$$

$$I = 2\pi i \frac{3}{2 \cdot 4^4 i} = \frac{3\pi}{256}. \quad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл Лапласа

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Решение. Если $\alpha = 0$, то $I(0) = \pi$. Кроме того, $I(\alpha)$ — четная функция. Поэтому достаточно вычислить $I(\alpha)$ при $\alpha >$

> 0 . Пусть

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx, \quad \text{где } \alpha > 0.$$

Тогда $I(\alpha) = \operatorname{Re} J(\alpha)$. К функции

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, \quad \text{где } \alpha > 0,$$

применима лемма Жордана и поэтому

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty,$$

где $\Gamma_R = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_0 = i$ — полюс первого порядка, вычет в которой равен

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \left. \frac{e^{i\alpha z}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-\alpha}}{2i},$$

и поэтому по формуле (4) находим

$$J(\alpha) = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=i} f(z) = \pi e^{-\alpha} \quad \text{при } \alpha > 0,$$

$$I(\alpha) = \operatorname{Re} J(\alpha) = \pi e^{-\alpha} \quad \text{при } \alpha > 0,$$

$$I(\alpha) = \pi e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \sin(8x-7)}{x^2-2x+5} dx.$$

Решение. Вычислим интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{i(8x-7)}}{x^2-2x+5} dx$$

и воспользуемся тем, что $I = \operatorname{Im} J$. К функции

$$f(z) = g(z)e^{i8z}, \quad \text{где} \quad g(z) = \frac{(z-1)e^{-7i}}{z^2 - 2z + 5},$$

применима лемма Жордана и поэтому $\int_{\Gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$, где $\Gamma_R = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_0 = 1 + 2i$ — полюс первого порядка, а

$$\operatorname{res}_{z=1+2i} f(z) = \frac{(z-1)e^{i(8z-7)}}{(z^2 - 2z + 5)'} \bigg|_{z=1+2i} = \frac{1}{2} e^{i(1+16i)} = \frac{e^{-16}}{2} (\cos 1 + i \sin 1).$$

По формуле (4) находим

$$J = 2\pi i \operatorname{res}_{z=1+2i} f(z) = \pi e^{-16} i (\cos 1 + i \sin 1),$$

откуда

$$I = \operatorname{Im} J = \pi e^{-16} \cos 1. \quad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл Дирихле

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение. Пусть $\Gamma_{\rho,R}$ — контур, изображенный на (рис. 7.2). Рассмотрим интеграл $I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz$.

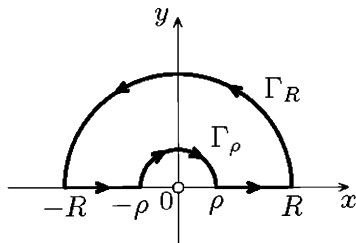


Рис. 7.2

Этот интеграл равен нулю, так как функция e^{iz}/z регулярна внутри контура $\Gamma_{\rho,R}$. С другой стороны, он равен сумме интегралов, взятых по полуокружностям Γ_ρ , Γ_R и отрезкам $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$. Имеем

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z),$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z = 0$. Если $z \in \Gamma_\rho$, то

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$$

и

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{z} dz = i \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi.$$

Функция $h(z)$ ограничена в окрестности точки $z = 0$ и, следовательно, $\varepsilon_1(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} h(z) dz \rightarrow 0$, при $\rho \rightarrow +0$. Отсюда получаем

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i\pi + \varepsilon_1(\rho).$$

По лемме Жордана $\varepsilon_2(R) = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz$ стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$. Далее, сумма интегралов по отрезкам $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$ равна

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\rho}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Следовательно,

$$0 = I_{\rho,R} = 2i \int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx - i\pi + \varepsilon_1(\rho) + \varepsilon_2(R), \quad (5)$$

где $\varepsilon_1(\rho) \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow +0$), $\varepsilon_2(R) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow +\infty$). Так как интег-

рал I сходится, то существует

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx = I.$$

Переходя в соотношении (5) к пределу при $\rho \rightarrow +0$, $R \rightarrow +\infty$, получаем $2iI - i\pi = 0$, откуда $I = \pi/2$.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2} dx. \quad (6)$$

Решение. В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $f(z) = \sqrt[3]{|z|}e^{i\varphi/3}$, $0 < \varphi < 2\pi$, является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt[3]{z}\}$ (§ 18–19).

Рассмотрим область D — круг $\{z: |z| < R\}$, $R > 8$, с разрезом по радиусу $[0, R]$. Граница этой области $\Gamma = \gamma_+ \cup C_R \cup \gamma_-$, где γ_+ — верхний берег разреза, C_R — окружность $\{z: |z| = R\}$, γ_- — нижний берег разреза, ориентация кривой Γ показана на (рис. 7.3).

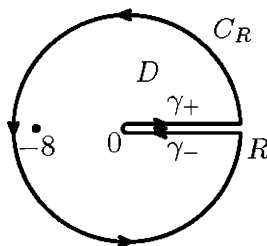


Рис. 7.3

Функция $g(z) = \frac{f(z)}{(z+8)^2}$ регулярна в области D , за исключением точки $z = -8$ — полюса второго порядка, и непрерывна

около Γ вплоть до Γ . По теореме о вычетах получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} g(z) dz &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=-8} g(z), \quad \text{т. е.} \\ \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2} dz + \int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2} dz + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2} dz &= \\ &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2}. \quad (7) \end{aligned}$$

Покажем, как с помощью этого равенства можно вычислить интеграл (6). Рассмотрим поочередно члены равенства (7).

1. Оценим интеграл

$$I_R = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2} dz.$$

При $|z| = R$ получаем

$$|f(z)| = \sqrt[3]{R}, \quad |z+8| \geq ||z| - 8| = R - 8 > 0,$$

откуда $\frac{1}{|z+8|} \leq \frac{1}{R-8}$. Поэтому

$$|I_R| \leq \frac{\sqrt[3]{R}}{(R-8)^2} \cdot 2\pi R \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty.$$

2. Если $z \in \gamma_+$, то

$$f(z) = f(x+i0) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0.$$

Поэтому

$$I_1 = \int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2} dz = \int_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2} dx.$$

Отметим, что при $R \rightarrow +\infty$ этот интеграл стремится к искомого интегралу (6).

3. Если $z \in \gamma_-$, то

$$f(z) = f(x - i0) = \sqrt[3]{x}e^{2\pi i/3}, \quad x \geq 0.$$

Поэтому интеграл

$$I_2 = \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2} dz = -e^{2\pi i/3} \int_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2} dx = -e^{2\pi i/3} \cdot I_1.$$

4. Правая часть равенства (7) не зависит от R при $R > 8$ и равна

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2} &= 2\pi i f'(z) \Big|_{z=-8} = 2\pi i \frac{f(z)}{3z} \Big|_{z=-8} = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2}{3(-8)} e^{\pi i/3} = -\frac{\pi i}{6} e^{\pi i/3}. \end{aligned}$$

В результате из равенства (7) при $R \rightarrow +\infty$ получаем

$$(1 - e^{2\pi i/3}) I = -\frac{\pi i}{6} e^{\pi i/3},$$

откуда

$$I = -\frac{\pi i e^{\pi i/3}}{6(1 - e^{2\pi i/3})} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\frac{e^{\pi i/3} - e^{-\pi i/3}}{2i}} = \frac{\pi}{12 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \quad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} dx.$$

Решение. Для вычисления этого интеграла с помощью вычетов регулярно продолжим подынтегральную функцию с интервала $(1, 2]$ в некоторую область в $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит отрезок $[1, 2]$. Так как подынтегральная функция при продолжении в $\overline{\mathbb{C}}$ становится многозначной функцией $\left\{ \sqrt[5]{\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}} \right\}$, то необходимо позаботиться о возможности выделения регулярных ветвей этой функции в полученной области. Следуя результатам § 18–19, получаем, что в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [1, 2]$ у функции

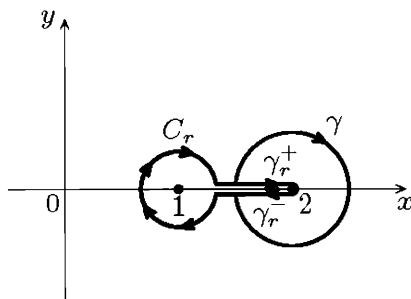


Рис. 7.4

$\left\{ \sqrt[5]{\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}} \right\}$ существуют регулярные ветви. Выберем такую ее регулярную ветвь $f(z)$, у которой $f(x+i0) > 0$ при $x \in (1, 2)$. Если для разреза $[1, 2]$ ввести, как и в предыдущей задаче, два берега: верхний γ^+ и нижний γ^- , то эта ветвь $f(z)$ непрерывно продолжима на границу $\gamma^+ \cup \gamma^-$ всюду, кроме точки 1. Чтобы выполнялись условия теоремы Коши о вычетах, нужно исключить точку 1 из границы и рассмотреть область

$$D(r) = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([1, 2] \cup \{z: |z-1| \leq r\}), \quad \text{где } r \in (0, 1).$$

В этой области функция $f(z)$ всюду регулярна (кроме ∞) и непрерывно продолжима вплоть до ее границы $\Gamma_r = C_r \cup \gamma_r^+ \cup \gamma_r^-$, где окружность $C_r = \{z: |z-1| = r\}$ ориентирована по ходу часовой стрелки, γ_r^+ — верхний берег разреза отрезка $[1+r, 2]$ с ориентацией от точки $1+r$ до точки 2, γ_r^- — нижний берег разреза отрезка $[1+r, 2]$ с ориентацией от точки 2 до точки $1+r$. Таким образом выбранная ориентация границы Γ_r является положительной для области $D(r)$.

Так как в области $D(r)$ функция $f(z)$ имеет единственную особую точку $z = \infty$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\int_{\gamma_r^+} f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz + \int_{\gamma_r^-} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z). \quad (8)$$

Покажем, что второе слагаемое левой части (8) стремится к

нулю при $r \rightarrow +0$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} f(z) dz \right| &\leq \int_{C_r} |f(z)| |dz| \leq \\ &\leq \int_{C_r} \left(\frac{1+r}{r} \right)^{3/5} |dz| = \left(\frac{1+r}{r} \right)^{3/5} 2\pi r \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Если $x \in \gamma_r^+$, то $f(x) = \sqrt[5]{\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^3}$,

$$\int_{\gamma_r^+} f(z) dz = \int_{1+r}^2 f(x) dx \rightarrow I \quad \text{при } r \rightarrow +0. \quad (9)$$

Если $x \in \gamma_r^-$, то

$$f(x) = \sqrt[5]{\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^3} e^{-i\frac{6\pi}{5}},$$

так как

$$\Delta \gamma \arg \left(\frac{2-z}{z-1} \right)^3 = -6\pi,$$

где $\gamma = \{z: |z-2| = \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1\}$ — окружность, ориентированная по ходу часовой стрелки. Поэтому

$$\int_{\gamma_r^-} f(z) dz \rightarrow -e^{-6\pi i/5} I \quad \text{при } r \rightarrow +0. \quad (10)$$

Найдем $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z}$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$. Если $x \in \mathbb{R}$ и $x > 2$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{\left|\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|} e^{-i3\pi/5} = e^{-3\pi i/5} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3/5} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-3/5} = \\ &= e^{-\frac{3\pi i}{5}} \left(1 - \frac{6}{5x} + \dots\right) \left(1 + \frac{3}{5x} + \dots\right) = \\ &= e^{-3\pi i/5} \left(1 + \left(\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\right) \frac{1}{x} + \dots\right) = S(x). \end{aligned}$$

Так как сумма аналитического продолжения полученного ряда $S(z)$ и функция $f(z)$ регулярны в кольце $\{z: |z| > 2\}$, причем $f(x) = S(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $x > 2$, то по теореме единственности для регулярных функций

$$f(z) = S(z) = e^{-3\pi i/5} - \frac{e^{-3\pi i/5}}{z} \cdot \frac{3}{5} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 2$.

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{3}{5} e^{-3\pi i/5}. \quad (11)$$

Переходя к пределу в равенстве (8) с учетом соотношений (9)–(11), получаем

$$I \left(1 - e^{-6\pi i/5} \right) = \frac{6}{5} \pi i e^{-3\pi i/5}$$

или

$$I \left(\frac{e^{3\pi i/5} - e^{-3\pi i/5}}{2i} \right) = \frac{3\pi}{5},$$

откуда находим

$$I = \frac{3\pi}{5 \sin \frac{3\pi}{5}}. \quad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)^2} dx. \quad (12)$$

Решение. В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $h(z) = \ln |z| + i\varphi$, $0 < \varphi < 2\pi$ является регулярной ветвью многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ (§ 17).

Обозначим

$$R(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^2}, \quad f(z) = R(z)h^2(z)$$

и рассмотрим область D , граница Γ которой показана на (рис. 7.5), где $0 < \rho < 1$, $R > 2$. В этой области функция $f(z)$ регулярна, за исключением точек $z = -1$, $z = -2$,

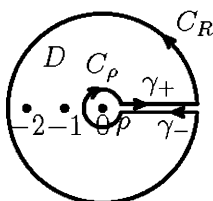


Рис. 7.5

и непрерывна около Γ вплоть до Γ . По основной теореме о вычетах получаем

$$\int_{C_\rho} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{\gamma_+} f(z) dz + \int_{\gamma_-} f(z) dz = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname{res}_{z=-2} f(z) \right]. \quad (13)$$

Рассмотрим поочередно члены этого равенства. Так как $|h(z)| \leq |\ln |z|| + 2\pi$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\rho} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_\rho} \frac{h^2(z) dz}{(z+1)(z+2)^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{(|\ln \rho| + 2\pi)^2 2\pi \rho}{(1-\rho)(2-\rho)^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow +0, \\ \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_R} \frac{h^2(z) dz}{(z+1)(z+2)^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{(\ln R + 2\pi)^2 2\pi R}{(R-1)(R-2)^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Если $z \in \gamma_+$, то $h(z) = \ln x$, а если $z \in \gamma_-$, то $h(z) = \ln x + 2\pi i$. Так как сумма интегралов по γ_+ и γ_- в левой части (13)

равна

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R \ln^2 x \cdot R(x) dx - \int_{\rho}^R (\ln x + 2\pi i)^2 R(x) dx = \\ = -4\pi i \int_{\rho}^R \ln x \cdot R(x) dx + 4\pi^2 \int_{\rho}^R R(x) dx, \end{aligned}$$

то переходя в левой части равенства (13) к пределу при $\rho \rightarrow +0$, $R \rightarrow +\infty$, получаем $-4\pi i I + 4\pi^2 I_1$, где

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}.$$

Найдем значение правой части (13), которая не зависит от ρ и R . Так как $z = -1$ — полюс первого порядка, а $z = -2$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \frac{h^2(z)}{(z+2)^2} \Big|_{z=-1} = (i\pi)^2 = -\pi^2, \\ \operatorname{res}_{z=-2} f(z) &= \left(\frac{h^2(z)}{z+1} \right)' \Big|_{z=-2} = \left[\frac{2h(z)}{z(z+1)} - \frac{h^2(z)}{(z+1)^2} \right] \Big|_{z=-2} = \\ &= \ln 2 + i\pi - (\ln 2 + i\pi)^2 = \pi^2 + \ln 2 - \ln^2 2 + i\pi(1 - 2\ln 2). \end{aligned}$$

Из равенства (13) следует, что

$$-4\pi i I + 4\pi^2 I_1 = 2\pi i (\ln 2 - \ln^2 2 + i\pi(1 - 2\ln 2)),$$

откуда находим, приравняв действительные и мнимые части и учитывая, что $I_1 \in \mathbb{R}$,

$$I = \frac{1}{2}(\ln^2 2 - \ln 2).$$

▲

§ 8. Конформные отображения элементарными функциями

Справочные сведения

1. Степенная функция.

Пусть $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим на области $G = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ функцию

$$w = |z|^t e^{it \arg z}, \quad \text{где } \arg z \in (0, 2\pi). \quad (1)$$

Эта функция регулярна на G . Причем при $t \neq 0$ функция (1) однолистка на области $D \subset G$, если D не содержит двух различных точек z_1, z_2 , таких, что $z_2 = z_1 \cdot e^{2\pi i k/t}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В частности, при $t > 0$ функция (1) осуществляет конформное отображение угловой области $G_{0, \varphi_0} = \{z: |z| > 0, 0 < \arg z < \varphi_0\}$, где $\varphi_0 \leq 2\pi$, $|t|\varphi_0 \leq 2\pi$, на угловую область $G_{0, t\varphi_0}$ (рис. 8.1).

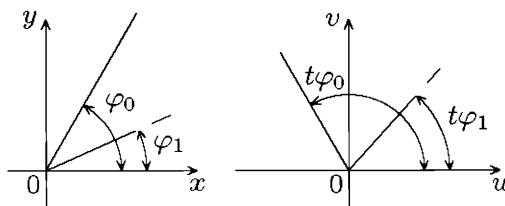


Рис. 8.1

Например, функция $w = z^2$ конформно отображает

- 1) верхнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ (рис. 8.2);
- 2) полукруг $\{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг с разрезом $\{w: |w| < 1\} \setminus [0, 1)$ (рис. 8.3);
- 3) полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z > a > 0\}$ на внешность параболы $\{w = u + iv: v^2 > 4a^2(u + a^2)\}$ (рис. 8.4).

2. Экспоненциальная функция.

Функция $w = e^z$ осуществляет конформное отображение в области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда D не содержит

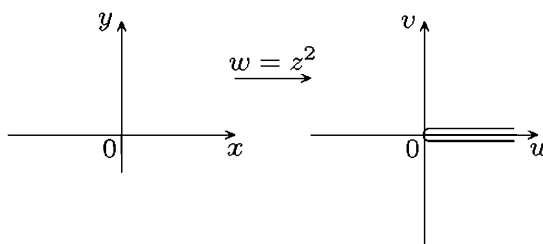


Рис. 8.2

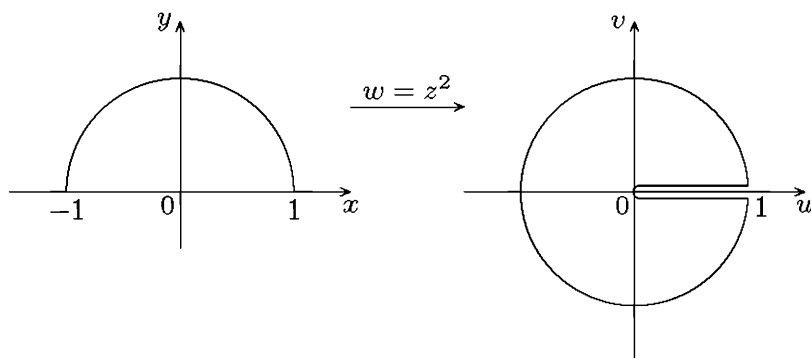


Рис. 8.3

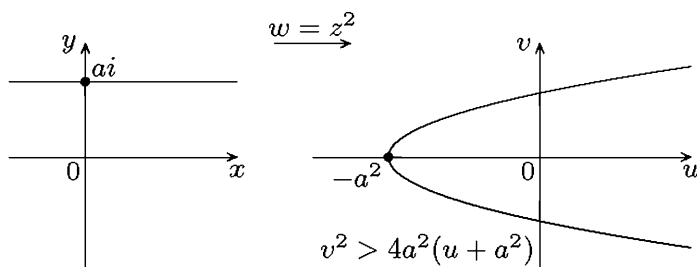


Рис. 8.4

двух различных точек z_1, z_2 , таких, что $z_2 = z_1 + 2\pi ki$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Например, функция $w = e^z$ конформно отображает

1) полосу $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.5);

2) полуполосу $\{z: \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на полукруг $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.6);

3) полуполосу $\{z: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на область $\{w: |w| > 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.7).

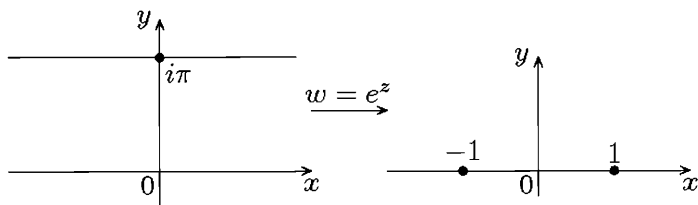


Рис. 8.5

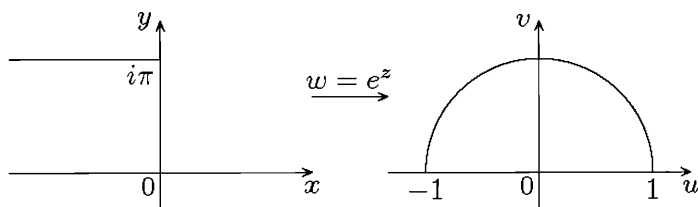


Рис. 8.6

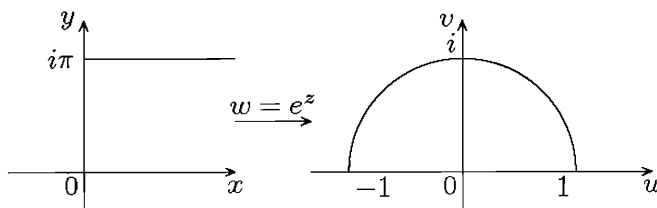


Рис. 8.7

3. Логарифмическая функция. Многозначная функция $w = \operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви во всякой односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащей точек 0 и ∞ . Каждая регулярная ветвь $f(z) \in \operatorname{Ln} z$ в такой области G является однолистной функцией (так как обратная к ней функция e^z является однозначной), поэтому эта ветвь $f(z)$ осуществляет конформное

отображение области G на область $f(G)$, которое является обратным к отображению области $f(G)$ на область G функцией $w = e^z$. Например, регулярная ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ кон-

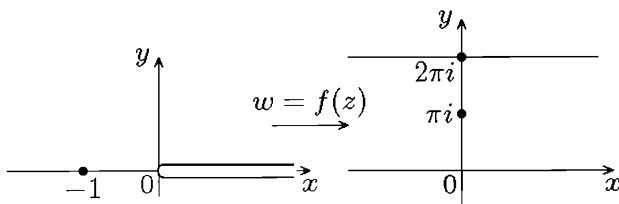


Рис. 8.8

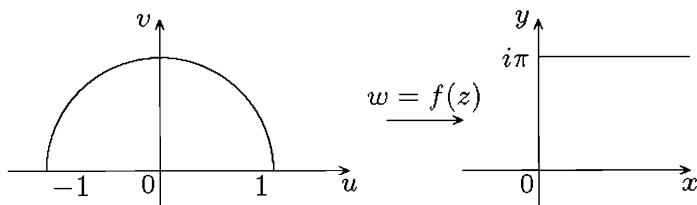


Рис. 8.9

формно отображает

- 1) плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$ (если $f(-1) = \pi i$) (рис. 8.8);
- 2) область $\{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ на полуклосу $\{w: 0 < \operatorname{Im} w < \pi, \operatorname{Re} w > 0\}$ (если $f(2 + i0) = \ln 2$) (рис. 8.9).

4. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ осуществляет конформное отображение области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда точки ± 1 не принадлежат области D и для любой точки $z \in D$ точка $\frac{1}{z} \notin D$.

Например, функция Жуковского конформно отображает

- 1) верхнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, т.е. на $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ (рис. 8.10);
- 2) нижнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z < 0\}$ на $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$;

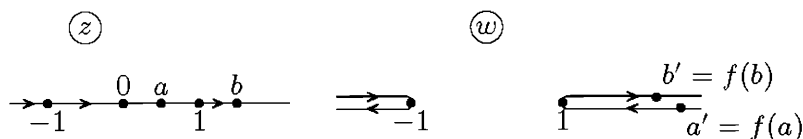


Рис. 8.10

- 3) единичный круг $\{z: |z| < 1\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$, т. е. на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (рис. 8.11);

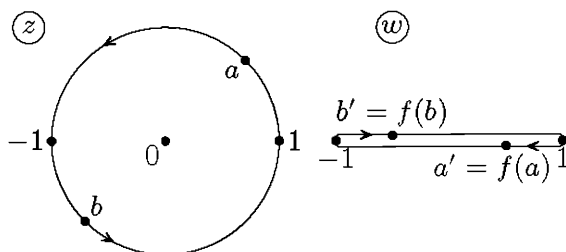


Рис. 8.11

- 4) внешность единичного круга (т. е. $\{z: |z| > 1\}$) на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (рис. 8.12);

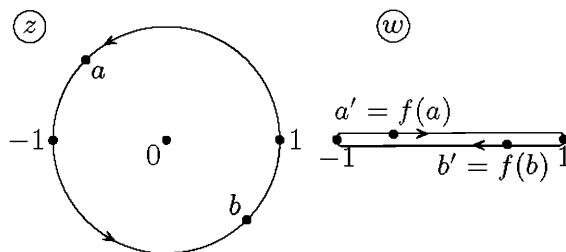


Рис. 8.12

- 5) область $\{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.13);
- 6) полукруг $\{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.14);



Рис. 8.13

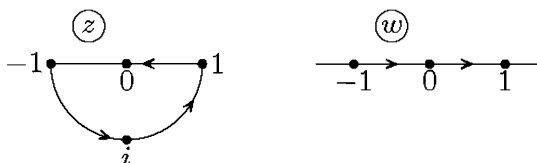


Рис. 8.14

- 7) область $\{z: |z| > \rho > 1\}$ (и круг $\{z: |z| < 1/\rho\}$) на внешность эллипса

$$\left\{ w = u + iv: \frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} > 1 \right\},$$

где $a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$, $b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|$ (рис. 8.15);

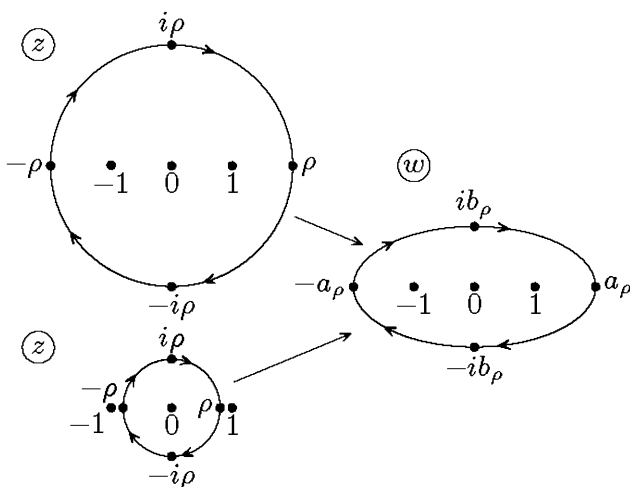


Рис. 8.15

- 8) угловую область $\{z: \alpha < \arg z < \pi - \alpha\}$, где $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, на внешность гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$ (рис. 8.16);

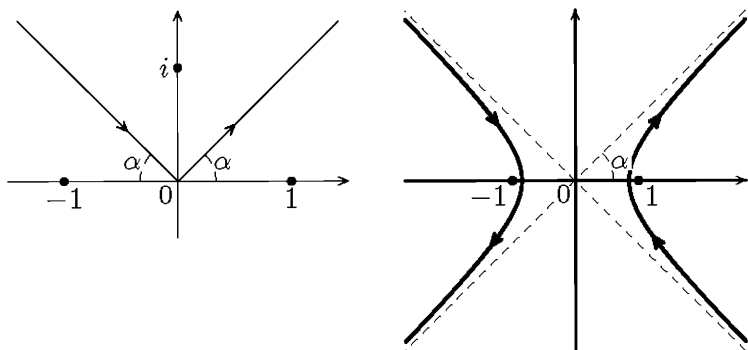


Рис. 8.16

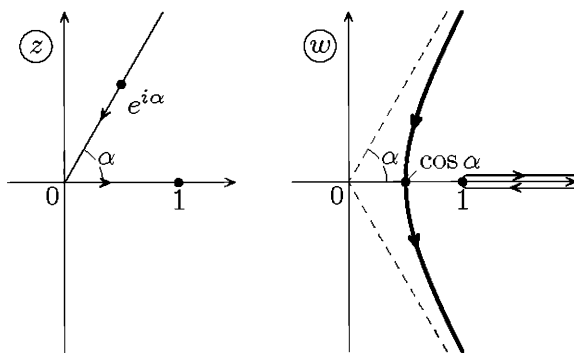


Рис. 8.17

- 9) угловую область $\{z: 0 < \arg z < \alpha\}$, где $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, на внутренность правой ветви гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$ с разрезом по лучу $[1, +\infty)$ (рис. 8.17);
- 10) угловую область $\{z: 0 < \arg z < \pi - \alpha, |z| > 1\}$, (рис. 8.18) где $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, на область

$$\left\{ w = u + iv: \frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} > 1, u > 0, v > 0 \right\}.$$

5. Функция, обратная к функции Жуковского.

Многозначная функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, являющаяся обратной к функции Жуковского, в любой односвязной области $G \subset \mathbb{C}$, не содержащей хотя бы одной кривой, соединяющей

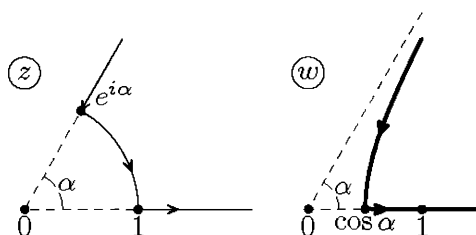


Рис. 8.18

точки $z = \pm 1$, распадается на две регулярные ветви. Всякая регулярная в области G ветвь функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ является однолистной (так как обратная к ней функция Жуковского является однозначной).

Например, регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$ обратной функции к функции Жуковского конформно отображают

- 1) плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внешность единичного круга (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(\infty) = \infty$) или на внутренность единичного круга (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(\infty) = 0$) (рис. 8.19);
- 2) плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ на верхнюю полуплоскость (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(0) = i$) или на нижнюю полуплоскость (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(0) = -i$) (рис. 8.20);
- 3) верхнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на область $\{w: \operatorname{Im} w > 0, |w| > 1\}$ (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(0 + i0) = i$) или на область $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$ (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(0 + i0) = -i$) (рис. 8.21).

6. Тригонометрические и гиперболические функции.

Основные тригонометрические и гиперболические функции можно разложить в суперпозицию уже ранее рассмотренных элементарных функций.

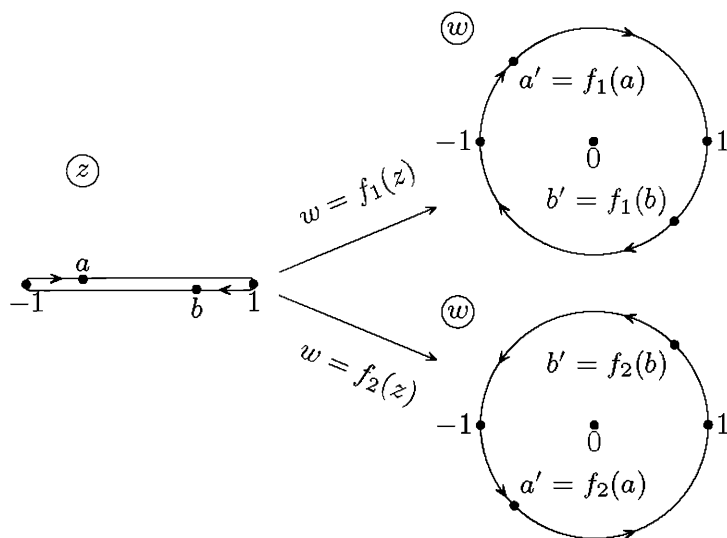


Рис. 8.19

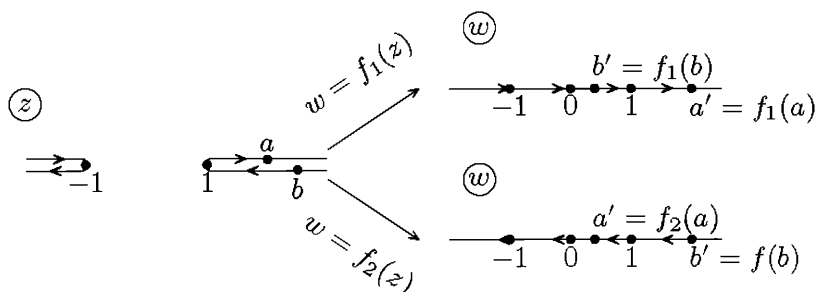


Рис. 8.20

Например, функция $w(z) = \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ является суперпозицией двух функций:

$$\zeta(z) = e^z, \quad w(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Функция

$$w(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = (-i) \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

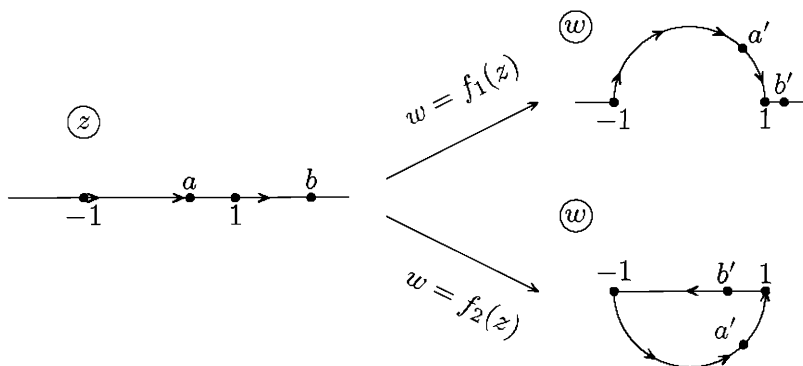


Рис. 8.21

является суперпозицией трех функций:

$$\zeta(z) = 2iz, \quad \eta(\zeta) = e^\zeta, \quad w(\eta) = (-i) \frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Примеры с решениями

Пример. Найти конформное отображение области D , являющейся верхней полуплоскостью $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[0, ih]$, где $h > 0$ (рис. 8.22), на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$.

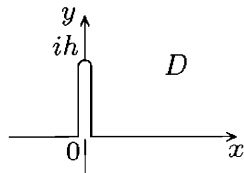


Рис. 8.22

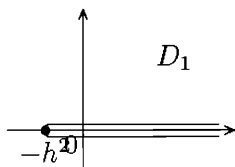


Рис. 8.23

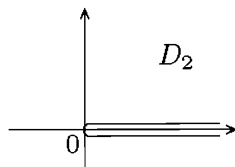


Рис. 8.24

Решение.

Функция $\xi = f_1(z) = z^2$ однолистка на области D и конформно отображает область D на область D_1 , являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[-h^2, +\infty)$ (рис. 8.23).

Функция $\eta = f_2(\xi) = \xi + h^2$ конформно отображает область D_1 на область D_2 , являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 8.24).

Функция $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i \arg \eta/2}$, где $\arg \eta \in (0, 2\pi)$, конформно отображает область D_2 на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Итак, функция $w = f_3(f_2(f_1(z)))$ конформно отображает область D на область $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$.

Пример. Найти конформное отображение области D , являющейся верхней полуплоскостью $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $\{z: |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \alpha\}$, где $0 < \alpha < \pi$ (рис. 8.25), на верхнюю полуплоскость.

Решение.

Функция Жуковского $\xi = f_1(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ отображает область D на плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[\cos \alpha, +\infty)$ (область D_1) (рис. 8.26).

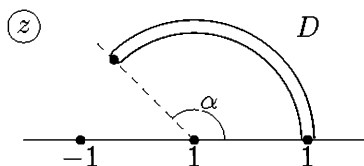


Рис. 8.25

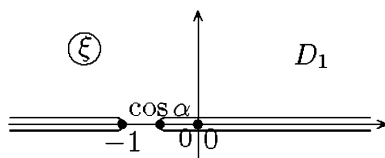


Рис. 8.26

Дробно-линейная функция $\eta = f_2(\xi) = \frac{\xi - \cos \alpha}{\xi + 1}$ отображает область D_1 на область D_2 , являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 8.24).

Функция $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i \arg \eta/2}$, где $\arg \eta \in (0, 2\pi)$, конформно отображает область D_2 на верхнюю полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$.

Итак, функция $w = f_3(f_2(f_1(z)))$ является искомой.

Пример. Область $D = \{z: \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1\} \setminus [2, 3]$ (рис. 8.27) конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

Решение.

Функция $\xi = f_1(z) = \frac{1}{z}$ отображает область D на область

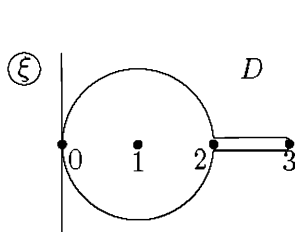


Рис. 8.27

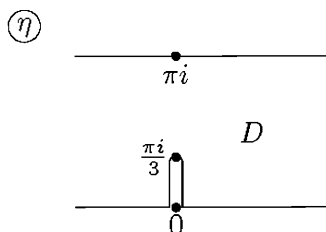


Рис. 8.28

D_1 , являющуюся полосой с разрезом, т. е.

$$D_1 = \left\{ \xi: 0 < \operatorname{Re} \xi < \frac{1}{2} \right\} \setminus \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right].$$

Линейная функция $\eta = f_2(\xi) = \pi i(1 - 2\xi)$ отображает область D_1 на область

$$D_2 = \{ \eta: 0 < \operatorname{Im} \eta < \pi \} \setminus \left[0, \frac{\pi}{3} i \right]$$

(рис. 8.28). Функция $w = f_3(\eta) = e^\eta$ отображает область D_2 на область (рис. 8.25) при $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Далее см. пример 2.

Пример. Найти конформное отображение области D (рис. 8.29), являющейся полуполосой $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{\pi i}{2}, \frac{\pi i}{2} + 1 \right]$ на верхнюю полуплоскость.

Решение.

Функция $\xi = f_1(z) = e^z$ отображает область D на область D_1 (рис. 8.30), являющуюся верхней полуплоскостью с выброшенным единичным полукругом и разрезом $[i, ei]$. Функция $\eta = f_2(\xi) = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right)$ отображает область D_1 на верхнюю полуплоскость с разрезом $[0, i \operatorname{sh} 1]$ (рис. 8.22) при $h = \operatorname{sh} 1$. Далее воспользоваться решением примера 1.

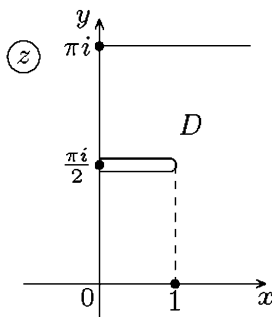


Рис. 8.29

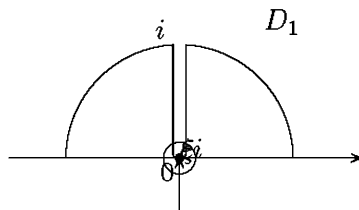


Рис. 8.30

§ 9. Задачи

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z - i)$ функцию

$$f(z) = \frac{2i + 1}{(z - i - 1)(z + i)}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = \frac{i}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

2. Исследовать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

3. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2-3x)}{x^2+4} dx$.

4. Вычислить $\oint_{|z+i|=2} \frac{z-1}{z(\cos \frac{1}{z}-1)} dz$.

5. Вычислить $\int_{-2}^1 \sqrt[10]{(x+2)^5(1-x)^5} dx$.

6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\text{Ln}(z^2 - 4z)$ в плоскости с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $\gamma_1 = \{|z - 2| = 2, \text{Im } z \leq 0\}$, $\gamma_2 = \{-\text{Re } z = \text{Im } z, \text{Im } z \geq 0\}$, причем $\text{Im } f(-5) = 0$. Вычис-

ЛИТЬ

$$\oint_{|z-2-2i|=1} \frac{dz}{f(z) - \ln 8 - 3\pi i}.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $z + 1$ функцию

$$f(z) = \frac{z + i}{iz^2 - 2z + 8i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = 2$. Указать границы кольца сходимости.

2. Найти особые точки однозначного характера функции

$$f(z) = \frac{2z + \pi}{2z - \pi} \exp\left(\frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \pi^2}\right)$$

и определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

$$3. \oint_{|z-2|=4} \frac{z(z^2+1)}{\exp \frac{2}{z^2} - 2} dz. \quad 4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3) \sin^3 x}{x^2+4x+8} dx. \quad 5. \int_{-3}^7 \sqrt[5]{\left(\frac{x-7}{x+3}\right)^3} \frac{x dx}{x+4}.$$

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{(z+1)(i-z)^2}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1; i]$ такая, что $g(0) = -1$. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{g(z)}{z-1} dz.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2002–2003 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z - 1)$ в окрестности точки $z_0 = -1$ функцию

$$f(z) = \frac{z + 8}{(z - 1)(z + 2)^2}$$

и указать область сходимости.

2. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\cos \frac{\pi i}{2(z-1)}}{e^{\pi z} + e^{\pi}},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

$$\mathbf{3.} \oint_{|z-\pi|=4} \frac{\cos \frac{1}{z}}{1-\cos z} dz. \quad \mathbf{4.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin(1-\sqrt{2}x)}{(2x^2+1)^2} dx. \quad \mathbf{5.} \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{(2-x)^2(x-1)}}.$$

6. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} \frac{z+1}{2+iz}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{ z \mid |z| = 2, -\pi \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cup [-2, -1]$$

такая, что $\operatorname{Im} h(\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл

$$J = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{h(z)}{\sin^3 z} dz.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2003–2004 г.)

1. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2 \sin^2 z \cdot \sin \frac{1}{z-\pi/2}}{(\cos z - 1)^2} e^{\frac{\sin z}{z}},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

2. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z - 2 - i)$ функцию

$$f(z) = \frac{z^2 - 2iz + 6}{z^2(z + 3i)}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = 5 + i$. Указать границы кольца сходимости.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

$$\mathbf{3.} \oint_{|z+1+i|=2} \frac{z-1}{(z+1) \sin \frac{1}{z}} dz. \quad \mathbf{4.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(2-x)}{4x^2+1} dx. \quad \mathbf{5.} \int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt{1+4z^2}\}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{ z \mid |z| = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 2\pi \right\}$$

такая, что $g(0) = 1$. Пусть $f(z) = \frac{z}{(g(z)+3)^2}$. Найти $\operatorname{res}_{\infty} f$ и вы-

числить интеграл

$$J = \oint_{|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}} f(z) dz.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2005–2006 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z - 3)$ функцию

$$f(z) = \frac{2z + i}{(z + 2i)^2} + \frac{z + 8 + 6i}{z^2 + 2z(i - 2) - 8i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = 0$. Найти радиусы кольца сходимости.

2. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{iz - z^2}\right)}{\left(e^{\frac{2\pi}{z}} - 1\right)^3},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

$$\mathbf{3.} \quad \oint_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{\operatorname{ch}^2 z} dz. \quad \mathbf{4.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(6x-1)\operatorname{Sin}(1-2x)}{4x^2+4x+5} dx. \quad \mathbf{5.} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x-1) \cdot \sqrt{x-1}}{x^2} dx.$$

6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ в области $G = \{z \mid |z| > 1\}$ такая, что $f(\infty) = 0$. Доказать, что многозначная функция $\sqrt{f(z) + 4i}$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{f(z) + 4i}$ в G такая, что $g(\infty) = -\sqrt{2}(i + 1)$. Вычислить интеграл

$$J = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{g(z)}.$$

§ 10. Ответы

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

$$1. f(z) = \frac{1}{z-i-1} - \frac{1}{z+i} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (z-i)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^n,$$

$$\forall z: |z-i| < 1.$$

2. $z_k = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ — полюса 1-го порядка; $z = 0$ — устр. о. т.; $z = \infty$ — неизол. о. т.

$$3. I = \frac{\pi}{2} e^{-6} \cdot \sin 2.$$

$$4. I = \frac{\pi i}{3}.$$

$$5. I = \frac{9\pi}{8}.$$

$$6. I = -4\pi.$$

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

$$1. f(z) = -\frac{i}{2(z+4i)} - \frac{i}{2(z-2i)}; \quad t = z+1: \quad \tilde{f}(t) = -\frac{i}{2(t-1+4i)} - \frac{i}{2(t-1-2i)} = \frac{i/2}{(1-4i)(1-\frac{t}{1-4i})} + \frac{i/2}{t(1-\frac{1+2i}{t})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i/2}{(1-4i)^{n+1}} t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i(1+2i)^{n-1}}{2t^n},$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i/2}{(1-4i)^{n+1}} (z+1)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{i(z+1)^n}{2(1+2i)^{n+1}}, \quad \sqrt{5} < |z+1| < \sqrt{17}.$$

$$2. f(z) = \frac{2z+\pi}{2z-\pi} \exp\left(\frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\pi^2}\right).$$

$z = \pm\pi$ — у.о.т.; $z = \pi/2 + \pi k$ — с.о.т.; ∞ — пред.с.о.т.

$$3. -16\pi i.$$

$$4. I = \underbrace{\frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3) \sin x}{x^2+4x+8} dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3) \sin 3x}{x^2+4x+8} dx}_{I_2}.$$

$-2-2i$ — полюс 1 порядка;

$$f_1(z) = \frac{(z+3)e^{iz}}{(z+2+2i)(z+2-2i)}; \quad a = \operatorname{res}_{-2+2i} f_1 = \frac{(1+2i)e^{i(-2+2i)}}{4i} = \frac{e^{-2}}{4i} (1+2i)(\cos 2 - i \sin 2),$$

$$I_1 = \operatorname{Im}(2\pi i a) = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi e^{-2}}{2} (1+2i)(\cos 2 - i \sin 2)\right) = \frac{\pi e^{-2}}{2} (2 \cos 2 - \sin 2).$$

$$f_2 = \frac{(z+3)e^{3iz}}{(z+2+2i)(z+2-2i)};$$

$$b = \operatorname{res}_{-2+2i} f_2 = \frac{(1+2i)e^{3i(-2+2i)}}{4i} = \frac{e^{-6}}{4i} (1+2i)(\cos 6 - i \sin 6),$$

$$I_2 = \operatorname{Im}(2\pi i b) = \operatorname{Im} \left(\frac{\pi e^{-6}}{2} (1+2i)(\cos 6 - i \sin 6) \right) =$$

$$= \frac{\pi e^{-6}}{2} (2 \cos 6 - \sin 6),$$

$$I = \frac{\pi}{8} (3e^{-2}(2 \cos 2 - \sin 2) - e^{-6}(2 \cos 6 - \sin 6)).$$

$$5. \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{5}} (10 - 4 \cdot 11^{3/5}).$$

$$6. J = -2\pi i(-C_{-1}) = 2\pi i e^{\frac{4\pi i}{3}} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{2i}{3} \right] = \frac{4}{3}\pi(1 + 2i)e^{\frac{4\pi i}{3}}. J = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f, f = \frac{g(z)}{z-1};$$

$$x > 2: g(x) = (-1)^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)} e^{\frac{i}{3}(0+2 \operatorname{arctg} x)},$$

$$\frac{g(x)}{x} = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} e^{i\pi + \frac{2i}{3} \operatorname{arctg} x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{4\pi i}{3}}, \text{ т.е. } g(z) \sim e^{\frac{4\pi i}{3}} z.$$

С другой стороны, $\frac{g(z)}{z} \in \sqrt[3]{1} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{i}{z}\right)^{2/3}$. $\exists g_0(z) \in \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{1/3}$, $g_0(\infty) = 1$, $\exists g_1(z) \in \left(1 - \frac{i}{z}\right)^{2/3}$, $g_1(\infty) = 1$, т.е. $\sqrt[3]{1}|_0 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$. $g_0(z) = 1 + \frac{1}{3z} - \frac{1}{9z^2} + \dots$; $g_1(z) = 1 - \frac{2i}{3z} + \dots$;
 $\frac{g(z)}{z} = e^{\frac{4\pi i}{3}} \left(1 + \frac{1}{3z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) \left(1 - \frac{2i}{3z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)$, $|z| > 1$. $f(z) = \frac{g(z)}{1-1/z} = e^{\frac{4\pi i}{3}} \left(1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2i}{3}\right) \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \dots\right),$

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2002–2003 г.)

$$1. f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}} (2n+5)(z-1)^n, 0 < |z-1| < 3.$$

$$2. z_k = 1 + (1+2k)i \text{ — полюс 1-го пор., } k \neq 0, -1;$$

$$z = 1 \pm i \text{ — у.о.т.,}$$

$$z = 1 \text{ — с.о.т.; } z = \infty \text{ — пред. т. полюсов.}$$

$$3. \operatorname{res}_0 f = 0, \operatorname{res}_{2\pi} f = \frac{1}{2\pi^2} \sin \frac{1}{2\pi}; \quad I = \frac{i}{\pi} \sin \frac{1}{2\pi}.$$

$$4. -\frac{\pi \cos 1}{8e}.$$

$$5. \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}.$$

$$6. J = 2\pi^2 - \pi i \left(\frac{5}{4} + \ln 2\right), h(0) = -\ln 2 - 2\pi i.$$

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2003–2004 г.)

1. $z = -\frac{\pi}{2}, z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ — полюсы 1-го порядка,
 $z_l = \pi l$ — С.О.Т., ∞ — неизол. О.Т.
2. $f(z) = \frac{2}{z-4i} + \frac{1}{z-2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n i^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}$.
3. $I = 4\pi(e - z)$.
4. $I = 2\pi \sin 12 \frac{e^{-\sqrt{23}}}{\sqrt{23}}$.
5. $I = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$.
6. $f(z) = 2\pi i + \ln z + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n} \right) (z-1)^n, R = \sqrt{2},$
 $S(-\frac{1}{5}) = 2\pi i + \ln \frac{26}{25}.$

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2005–2006 г.)

1. $f(z) = \frac{3}{z-4} - \frac{3i}{(z+2i)^2} = \sum_{k=-\infty}^{-1} 3(z-3)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} 3i(k+1)(-1)^{k+1}(3+2i)^{-k-2}(z-3), K = \{z \mid 1 < |z-3| < \sqrt{13}\}.$
2. $-i, \frac{i}{3}$ — полюса 1-го порядка; $\frac{i}{k}$ — полюса 3-го порядка,
 $K \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}, i$ — С.О.Т.; 0 — точка накопления полюсов;
 ∞ — полюс 3-го порядка.
3. $2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}.$
4. $-\frac{\pi e^{-2}}{2}(3 \cos 2 + 2 \sin 2).$
5. $\pi.$
6. $\frac{\pi(i-1)}{4\sqrt{2}}.$